Spursatz

Maximilian Kling

LMU München

Zillertal, 08.01.2015

Sobolew-Räume (Wdh.)

Definition: Sei $U \in \mathbb{R}$ offen und $1 \leq p \leq \infty$.
Der Sobolew-Raum $W^{k,p}(U)$ ist der Raum aller lokal integrierbaren Funktionen $u : U \mapsto \mathbb{R}$, sodass für jeden Multiindex $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $|\alpha| \leq k$ die schwache Ableitung $D^\alpha u$ in $L^p(U)$ existiert.

Erinnerung: $v = D^\alpha u$ ist die α-te schwache Ableitung von u, falls

$$\int_U u D^\alpha \Phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \Phi dx \quad \forall \Phi \in C_c^\infty(U)$$

Der Sobolew-0-Raum

Definition: Die Sobolew-Norm ist definiert als:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} ess\ sup|D^\alpha u| & p = \infty \end{cases}$$

Definition Der Sobolew-0-Raum $W_0^{k,p}(U)$ ist der Abschluss von $C_c^\infty(U)$ in $W^{k,p}(U)$.

u liegt also in $W_0^{k,p}(U)$ gdw. $\exists (u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(U)$ sodass $u_m \to u$ im Sinne der Sobolew-Norm.

Der Spuroperator - Motivation

Sei im Folgenden wieder $U \in \mathbb{R}^n$ offen.
Definition Der Rand ∂U ist C^k, wenn $\forall x_0 \in \partial U \; \exists r > 0$ und eine C^k Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$, sodass unter eventueller Änderung der Koordinatenachsen gilt:

$$U \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) | x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}$$

Sei nun ∂U C^1 und $u \in W^{1,p}(U)$.

Problem bei Berechnung von RWP: $u \in W^{1,p}(U)$ ist auf ∂U schwer zu definieren, da ∂U Lebesgue-Nullmenge und u auf Nullmengen nicht definiert. Lösung:

Spursatz

Sei U beschränkt und ∂U C^1. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator

$$T : W^{1,p}(U) \mapsto L^p(\partial U)$$

sodass:

- $Tu = u|_{\partial U}$ wenn $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$
- $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$

$\forall u \in W^{1,p}(U)$, wobei C nur von U und p abhängt.

Wir nennen Tu die <u>**Spur**</u> von u auf ∂U.

Beweis des Spursatzes (I/IV)

Sei zunächst $u \in C^1(\bar{U})$, $x^0 \in \partial U$ und ∂U flach bei x^0, in der Ebene $\{x_n = 0\}$ liegend.
Dann existiert ein offener Ball $B := B_r(x^0)$ mit

$$B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{U}$$

Definiere $\hat{B} := B_{\frac{r}{2}}(x^0)$ und wähle $\eta \in C_c^\infty(B)$ mit $\eta|_B \geq 0$ und $\eta|_{\hat{B}} = 1$.
Zuletzt sei $\Gamma := \partial U \cap \hat{B}$ und $x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R} = \{x_n = 0\}$.

Beweis des Spursatzes (II/IV)

Es ergibt sich:

$$\int_\Gamma |u|^p dx' \leq \int_{\{x_n=0\}} \eta |u|^p dx' \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{B^+} (\eta |u|^p)_{x_n} dx \overset{\text{Prod.Regel}}{=}$$

$$-\int_{B^+} |u|^p \eta_{x_n} + p|u|^{p-1}(sgn\ u) u_{x_n} \eta dx \overset{\text{Young-Ungl.}}{\leq} C \int_{B^+} |u|^p + |Du|^p dx$$

Im Fall $x^0 \in \partial U$, aber einem nicht-flachen Rand, wird der Rand in einer Umgebung von x^0 verflacht und es ergibt sich mit Veränderung der Variablen:

$$\int_\Gamma |u|^p dS \leq C \int_U |u|^p + |Du|^p dx$$

wobei mit dS das jeweilige Oberflächenmaß gemeint ist.

Beweis des Spursatzes (III/IV)

∂U ist kompakt $\Rightarrow \exists (x_i^0)_{i\in\{1,\dots,N\}}, \quad N < \infty$ und entsprechend $(\Gamma_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ sodass $\partial U = \cup_{i=1}^N \Gamma_i$ und

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Mit der Konvention: $Tu = u|_{\partial U}$ gilt also:

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq \hat{C}\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad \hat{C} \in \mathbb{R} \tag{1}$$

wobei $\hat{C}$ nur von U und p abhängt.

Beweis des Spursatzes (IV/IV)

Bisher: $u \in C^1(\bar{U})$. Sei also $u \in W^{1,p}(U)$.

Dann gibt es $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{U})$ sodass $u_m \xrightarrow{W^{1,p}(U)} u$. Mit (1) gilt also:

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial U)} \leq \hat{C}\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}$$

Also ist $(Tu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $L^p(\partial U)$. Definiere $Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m$ in $L^p(\partial U)$.

Ist $u \in W^{1,p} \cap C(\bar{U})$, liefert ein Approximationsargument auch gleichmäßige Konvergenz von u_m gegen u und:

$$Tu = u|_{\partial U}$$

$\square$

Nullspurfunktionen in $W^{1,p}(U)$

Im Folgenden werden Funktionen mit Nullspur betrachtet.

Satz Sei U beschränkt, ∂U C^1 und $u \in W^{1,p}(U)$. Dann:

$$\boxed{u \in W_0^{1,p}(U) \Longleftrightarrow Tu = 0 \ \text{ auf } \partial U}$$

Beweis „⇒“ Sei $u \in W_0^{1,p}(U) \Rightarrow \exists (u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(U) : u_m \overset{W^{1,p}(U)}{\longrightarrow} u$.

Da $Tu = 0$ auf ∂U $\forall m \in \mathbb{N}$ und $T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ lin. beschr. Operator, folgt $Tu = 0$ auf ∂U.

Beweis des Nullspursatzes (I/V)

„$\Leftarrow$“ Sei $Tu = 0$ auf ∂U. Mit Zerlegung der Eins und erneutem Verflachen von ∂U, kann auch angenommen werden:

$$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \ \wedge \ u \text{ hat kompakten Träger } \wedge \ Tu = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$$

Dann $\exists (u_m)_{m\subset\mathbb{N}} \in C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$: $u_m \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} u$ und es gilt:
$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$

Ist nun $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \geq 0$, so gilt:

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)| dt$$

Beweis des Nullspursatzes(II/V)

Also:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx' \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m|^p dx' dt\Big)$$

$m \to \infty$ liefert:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dt \text{ für fast jedes } x_n \geq 0 \tag{2}$$

Beweis des Nullspursatzes(III/V)

Sei nun $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $\eta \equiv 1$ auf $[0,1]$, $\eta \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \setminus [0,2]$ und $0 \leq \eta \leq 1$ und:

$$\eta_m := \eta(mx_n), \ (x \in \mathbb{R}^n_+)$$
$$w_m := u(x)(1 - \eta_m)$$

Dann:

$$w_{m,x_n} = u_{x_n}(1 - \eta_m) - mu\eta'$$
$$D_{x'} w_m = D_{x'} u(1 - \eta_m)$$

Es ergibt sich:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} |\eta_m|^p |Du|^p dx + Cm^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt$$

Beweis des Nullspursatzes (IV/V)

Nun gilt: $C\int_{\mathbb{R}^n_+} |\eta_m|^p |Du|^p dx \longrightarrow 0$ und mit (2) lässt sich folgern:

$$Cm^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt \leq Cm^p \Big(\int_0^{\frac{2}{m}} t^{p-1} dt\Big)\Big(\int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dx_n\Big)$$

$$\leq C \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dx_n \longrightarrow 0 \text{ wenn } m \to \infty$$

Insgesamt also: $Dw_m \to Du$ in $L^p(\mathbb{R}^n_+)$

Beweis des Nullspursatzes

Da offensichtlich auch $w_m = u(1-\eta_m) \to u(1-0) = u$ in $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ können wir folgern, dass:

$$w_m \longrightarrow u \text{ in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$$

nach Def. der Sobolew-Norm.
Aber $w_m = 0$, sobald $0 < x_n < \frac{1}{m}$. Deswegen können wir die w_m so modifizieren, dass $\exists (u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, sodass $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.
Es ergibt sich $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ $\square$