Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi

Wintersemester 2014/15
31.1.2015

Maß- und Integrationstheorie mehrerer Variablen

Klausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2007 ❑ 2010 ❑ 2011 Master, PO ❑ 2010 ❑ 2011

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch. Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, beidseitig per Hand beschriebene A4-Seite in der Klausur zu benutzen sowie einen nicht-programmierbaren Taschenrechner. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, vermerken Sie dies am unteren Ende des Angabenblattes der entsprechenden Aufgabe und schreiben den Rest auf die Rückseite oder auf eine von uns ausgehändigte leere Seite (hinten an der Klausur hängen schon zwei leere Seiten). Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die nebenstehende Zahl, unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
max. Punkte	**3,5**	**6**	**7,5**	**2,5**	**3,5**	**3**	**5,5**
Punkte							

Σ Gesamt (max. 31,5)	

Viel Erfolg !

Name: ______________________________

Aufgabe 1 **(3,5) Punkte**

Seien $f, g \in L^1([a,b])$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Für $x \in [a,b]$ seien

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt, \qquad G(x) := \int_a^x g(t)\, dt.$$

Zeigen Sie die folgende Formel:

$$\int_a^b F(t)\, g(t)\, dt = F(b)\, G(b) - \int_a^b f(t) G(t)\, dt.$$

Integrieren Sie hierzu $h : [a,b]^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(y)\, g(x) \chi_{\{y<x\}}(x,y)$ über $[a,b]^2$. Begründen Sie Ihre Schritte.

Lösung zu Aufgabe 1

Auf $[a,b]^2$ sei $h(x,y) := f(y)g(x)\chi_{y<x}$. Dann ist h als Produkt messbarer Funktionen messbar. Es gilt $|h(x,y)| \leq |f(y)||g(x)|$. Da $f, g \in L^1([a,b])$ ist $((x,y) \mapsto |f(y)||g(x)|) \in L^1([a,b]^2)$. Genauer

$$\int_a^b \int_a^b |f(y)||g(x)|\, dx\, dy = \|f\|_{L^1([a,b])} \|g\|_{L^1([a,b])} < \infty.$$

Also ist $h \in L^1([a,b]^2)$.
Damit gilt mit Fubini (da $h \in L^1([a,b]^2)$)

$$\int_{[a,b]^2} h(x,y) d\lambda^2(x,y) = \int_a^b \int_a^b f(y) g(x) \chi_{y<x}(x,y)\, dx\, dy =: I.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(y) \Big(\int_a^b g(x) \chi_{y<x}(x,y)\, dx \Big)\, dy \\ &= \int_a^b f(y) \big(G(b) - G(y) \big)\, dy \\ &= G(b) \int_a^b f(y)\, dy - \int_a^b f(y) G(y)\, dy \\ &= G(b) F(b) - \int_a^b f(y) G(y)\, dy. \end{aligned}$$

Ebenfalls mit Fubini gilt

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b g(x) \Big(\int_a^b f(y) \chi_{y<x}(x,y)\, dy \Big)\, dx \\ &= \int_a^b g(x) \Big(\int_a^x f(y)\, dy \Big)\, dx \\ &= \int_a^b g(x) F(x)\, dx. \end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\int_a^b g(x) F(x)\, dx = I = G(b) F(b) - \int_a^b f(y) G(y)\, dy.$$

Dies ist die Behauptung.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 2 **(6) Punkte**

Sei P der abgeschnittene Paraboloid

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 2z,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Bestimmen Sie mit ausführlicher Rechnung

$$J := \int_P (x^2 + y^2 + z^2)\, d\lambda^3(x, y, z).$$

Tipp: Zylinderkoordinaten.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir benutzen Zylinderkoordinaten mit Ausrichtung in Richtung der z-Achse, d.h.

$$\Phi \,:\, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \,:\, x \geq 0\}.$$

Φ ist ein Diffeomorphismus .

Die Funktionalmatrix ist

$$\nabla\Phi = (\partial_r \Phi, \partial_\varphi \Phi, \partial_z \Phi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $\det(\nabla\Phi) = r$.

Sei

$$U = \{(r, \varphi, z) \,:\, 0 < r^2 < 2z, 0 < z < 1, 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Dann ist $\Phi(U) = P$ bis auf eine Nullmenge (Teilmenge von $\{(x, 0, z) \,:\, x \geq 0\}$).

Wir berechnen das Volumen von P mit Hilfe des Transformationssatzes und Fubini als

$$\begin{aligned}
\lambda^3(P) &= \int_P (x^2 + y^2 + z^2) d\lambda^3(x, y, z) \\
&= \int_{\Phi(U)} (x^2 + y^2 + z^2) d\lambda^3(x, y, z) \\
&= \int_U (r^2 + z^2) \big|\det\big(\nabla\Phi(r, \varphi, z)\big)\big|\, d\lambda^3(r, \varphi, z) \qquad \text{Trafosatz} \\
&= \int_U r^3 + z^2 r\, d\lambda^3(r, \varphi, z) \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}} \chi_U(r, \varphi, z)\big(r^3 + z^2 r\big)\, d\lambda^3(r, \varphi, z) \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} \int_0^{2\pi} r^3 + z^2 r\, d\varphi\, dr\, dz \qquad \text{Fubini} \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 + z^2 r\, dr\, dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} z^2 r^2\right]_{r=\sqrt{z}}^{r=\sqrt{2z}} dz \\
&= 2\pi \int_0^1 z^2 + z^3\, dz \\
&= 2\pi\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) = \frac{7}{6}\pi.
\end{aligned}$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 3 **(7,5) Punkte**

Sei $f \in L^1([0,\infty))$. Für alle $s \in [0,\infty)$ definiere

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Zeigen Sie:

(a) [+1,5] F ist wohldefiniert und $F \in L^\infty$.

(b) [+3,5] F ist stetig auf $[0,\infty)$ und $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

(c) [+2,5] Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist auf $(0,\infty)$. Bestimmen Sie F'.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Es gilt $|e^{-st} f(t)| \leq |f(t)| \in L^1((0,\infty))$. Damit ist $F(s)$ wohldefiniert und es gilt für all $s \geq 0$

$$|F(s)| \leq \int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt \leq \int_0^\infty |f(t)|\, dt = \|f\|_1.$$

Also ist $F \in L^\infty((0,\infty))$ mit $\|F\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(b) Sei $g(s,t) := e^{-st} f(t)$. Dann ist $s \mapsto g(s,t)$ für jedes t stetig . Außerdem gilt

$$|g(s,t)| \leq |f(t)| \in L^1((0,\infty)).$$

Damit hat $g(s,\cdot)$ eine von s unabhängige Majorante . Es folgt mit dem Satz über Parameterintegrale, dass $F(s) = \int_0^\infty g(s,t)\, dt$ stetig ist .

Für alle $t > 0$ gilt

$$\lim_{s\to\infty} g(s,t) = \lim_{s\to\infty} \left(e^{-st} f(t)\right) = 0.$$

Damit gilt $g(s,t) \to 0$ für $s \to \infty$ fast überall, denn $\{0\}$ ist eine Nullmenge.

Da $|g(s,t)| \leq |f(t)| \in L^1((0,\infty))$ folgt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = \int_0^\infty 0\, dt = 0.$$

(c) Sei g wie oben. Dann ist $g(s,t)$ für $s > 0$ diffbar und es gilt $\partial_s g(s,t) = -te^{-st} f(t)$. Es gilt

$$\left|-te^{-st} f(t)\right| \leq te^{-st} |f(t)|.$$

Für jedes feste $s > 0$ ist te^{-st} auf $[0,\infty)$ beschränkt . Es ist sogar gleichmäßig beschränkt für $s \geq s_0$ mit $s_0 > 0$ fest .

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|-te^{-st} f(t)\right| dt &\leq \int_0^\infty \|te^{-st}\|_\infty |f(t)|\, dt \\ &= \|te^{-st}\|_\infty \int_0^\infty |f(t)|\, dt < \infty.\end{aligned}$$

Mit dem Satz über Parameterintegrale folgt:

$$\partial_s F(s) = \int_0^\infty \partial_s (e^{-st} f(t))\, dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\, dt.$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 4 **(2,5) Punkte**

Sei $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra über $\mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{E} := \Big\{(0,\infty), (-1,1), (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}), (-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}), \dots\Big\}.$$

(a) [+1,5] Ist $(-\infty, 0) \in \mathcal{A}$?

(b) [+1] Ist die folgenden Funktion $\mathcal{A}$-messbar?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Ja: $(0,\infty) \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus (0,\infty) = (-\infty, 0] \in \mathcal{A}$. Aus $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{A}$ folgt $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\} \in \mathcal{A}$, also auch $(-\infty, 0) = (-\infty, 0] \setminus \{0\} \in \mathcal{A}$.

(b) $f = 1 \cdot \chi_{(0,\infty)} + (-1)\chi_{(-\infty,0)}$ ist als Treppenfunktion messbarer Mengen messbar .

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 5 **(3,5) Punkte**

Seien $f(x) := x\,\chi_{[0,1]}(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Fouriertransformierten von f und $f * f$.

Lösung zu Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\hat{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} x \chi_{[0,1]}(x)\,dx \\
&= \int_0^1 e^{-itx} x\,dx \\
&= \left[\frac{1}{-it} e^{-itx} x\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{-it} e^{-itx}\,dx \\
&= \frac{1}{-it} e^{-it} + \frac{1}{it} \int_0^1 e^{-itx}\,dx \\
&= \frac{1}{-it} e^{-it} + \frac{1}{it} \left[\frac{1}{-it} e^{-itx}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{e^{-it}}{-it} + \frac{1}{t^2}\left(e^{-it} - 1\right) \\
&= \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{it}\right) e^{-it} - \frac{1}{t^2} \\
&= \frac{1 + it}{t^2} e^{-it} - \frac{1}{t^2}.
\end{aligned}$$

Somit:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1+it}{t^2} e^{-it} - \frac{1}{t^2}\right).$$

Ferner gilt:

$$(f * f)\widehat{\ } = \sqrt{2\pi}\hat{f} \cdot \hat{f} = \left(\frac{1+it}{t^2} e^{-it} - \frac{1}{t^2}\right)^2.$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 6 **(3) Punkte**

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{-x}\big(\sin(x)\big)^n \, dx.$$

Lösung zu Aufgabe 6

Betrachte $e^{-x}(\sin x)^n$. Sei $E := \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus E$ ist $|\sin x| < 1$, somit

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x}(\sin x)^n = 0$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus E$. E ist abzählbar und somit eine Nullmenge , d.h.

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x}(\sin x)^n = 0$$

fast überall. Ferner gilt

$$|e^{-x}(\sin x)^n| \leq |e^{-x}| \in L^1((1,\infty)),$$

so dass man mittels majorisierter Konvergenz erhält:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{-x}(\sin x)^n \, dx = \int_0^1 0 \, dx = 0.$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 7 **(5,5) Punkte**

Wir betrachten die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n\,x}} \chi_{[\frac{1}{n},1]}(x)$.
Entscheiden Sie mit Begründung, ob f_n im jeweiligen Sinne für $n \to \infty$ gegen die Nullfunktion konvergiert:

(a) [+1] punktweise,

(b) [+1] in L^∞,

(c) [+0,5] fast überall (bzgl. des Lebesguemaßes),

(d) [+1,5] in $L^1([0,1])$,

(e) [+1,5] in $L^2([0,1])$.

Lösung zu Aufgabe 7

(a) Für $x > 0$ gilt $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{nx}}$, somit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
Ferner $f_n(0) = 0$, somit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

(b)

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= \Big\|\frac{1}{\sqrt{nx}} \chi_{[\frac{1}{n},1]}\Big\|_\infty \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{n}, \end{aligned}$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \infty$. Also keine Konvergenz in L^∞.

(c) In a) wurde punktweise Konvergenz überall gezeigt. Dies impliziert punktweise Konvergenz fast überall.

(d)

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x)|\,dx &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{nx}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}(\ln 1 - \ln\frac{1}{n}) \\ &= \frac{\ln n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Somit $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$. $\Rightarrow$ Konvergenz in L^1.

(e)

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n}x}\right)^2 dx\\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{nx^2}\,dx\\ &= \frac{1}{n}\left[-1+\frac{1}{\frac{1}{n}}\right]\\ &= \frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

Somit $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_2 = 1$. $\Rightarrow$ Keine Konvergenz in L^2.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____

(Extrablatt)

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

(Extrablatt)

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.