Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 24.11.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n)$ und $p > 0$. Zeigen Sie (mit Fubini), dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p \mathrm{d}x = p \int_0^\infty t^{p-1}\, \lambda^n(\{f > t\})\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 2: **3+3+3 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)
$$J_1 := \int_I \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(x+y)^2}, \qquad I := [1,2] \times [3,4]$$

(b)
$$J_2 := \int_I \frac{y\,\mathrm{d}(x,y)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad I := [0,1] \times [0,1]$$

(c)
$$J_3 := \int_B \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}(x,y), \qquad B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \le y \le x\}$$

Aufgabe 3: **3+3 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein messbares Gebiet (offen, zusammenhängend, nicht-leer) mit $0 < \lambda^n(G) < \infty$. Ferner sei eine stetige Abbildung $f : G \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie

$$\exists\, \xi \in G : \frac{1}{\lambda^n(G)} \int_G f(x)\mathrm{d}x = f(\xi),$$

(a) wenn f beschränkt ist,

(b) wenn $f \in \mathcal{L}^1(G)$.