Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 22.12.2014

# Maß- und Integralrechnung

# Übungsblatt 11

**Aufgabe 1:** **5 Punkte**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$. Ferner gebe es ein $x \in \mathcal{H}$, so dass

$$\forall y \in \mathcal{H} : \langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y\rangle$$

und

$$\|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \text{ in } \mathcal{H}.$$

**Aufgabe 2:** **4 Punkte**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in L(\mathcal{H})$. Zeigen Sie:

$$(\operatorname{ran} T^*)^\perp = \ker T.$$

**Aufgabe 3:** **2+1+2+2 Punkte**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $U$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich dann jedes $x \in \mathcal{H}$ eindeutig in $x = u + u^\perp$ zerlegen lässt, wobei $u \in U$ und $u^\perp \in U^\perp$. Wir definieren die Abbildungen $P_U : \mathcal{H} \to U$ und $P_{U^\perp} : \mathcal{H} \to U^\perp$ durch

$$P_U x := u \text{ und } P_{U^\perp} x := u^\perp.$$

(a) Eine Abbildung $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heisst Projektion, wenn $P^2 = P$ gilt. Zeigen Sie, dass $P_U$ und $P_{U^\perp}$ lineare Projektionen sind.

(b) Zeigen Sie: $P_{U^\perp} = \mathbb{1} - P_U$.

(c) Zeigen Sie, dass $P_U$ und $P_{U^\perp}$ selbstadjungiert sind.

(d) Zeigen Sie, dass $\min\limits_{u\in U} \|x - u\| = \|x - P_U x\|$.

(e) Zeigen Sie $\ker P_{U^\perp} = \operatorname{ran} P_U$ und $\ker P_U = \operatorname{ran} P_{U^\perp}$.

**Aufgabe 4:** **4 Punkte**

Sei $w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachten Sie auf $C[0, 1] \times C[0, 1]$ die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_w : (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)w(t)\mathrm{d}t.$$

Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle_w$ ein Skalarprodukt ist. Wann ist die von $\langle \cdot, \cdot\rangle_w$ abgeleitete Norm äquivalent zur vom üblichen Skalarprodukt $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ abgeleiteten Norm?

Abgabe bis Mittwoch, den 07.01.2015 um 10:15 Uhr