Überdeckungssatz von Vitali

Franziska Werner

LMU München

Zillertal / 12.12.2013 - 15.12.2013

Notation und Definitionen

Notation:

Sei B ein abgeschlossener Ball in $\mathbb{R}^n$. Man bezeichnet $\widehat{B}$ als die Bälle mit

$$diam\widehat{B} = 5\ diamB$$

Definitionen:

1. Eine Menge F heißt Überdeckung einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, falls
$$A \subset \bigcup_{B \in F} B.$$
2. F heißt feine Überdeckung von A falls
$$\inf\{diam(B) =| x \in B, B \in F\} = 0$$

überdeckungssatz von Vitali

Sei F eine Menge abgeschlossener Bälle in $\mathbb{R}^n$ mit

$$sup\{diamB \mid B \in F\} < \infty,$$

dann existiert eine abzählbare Familie G aus disjunkten Bällen in F, so dass

$$\bigcup_{B \in F} B \subset \bigcup_{B \in G} \widehat{B}.$$

Beweis Teil 1:

Es sei $D \equiv sup\{diamB \mid B \in F\}$ und $F_j \equiv \{B \in F \mid \frac{D}{2^j} < diamB \leq \frac{D}{2^{j-1}}\}$

Sei $G_j \in F_j$ wie folgt:

(a) Sei G_1 eine maximale disjunkte Menge an Bällen in F_1

(b) Iteration: Haben $G_1, G_2, ..., G_{k-1}$, bilden G_k als maximal disjunkte Teilmenge, so dass

$$\{B \in F_k \mid B \cap B' = \emptyset,\ \forall B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j\}$$

und

$$G \equiv \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$$

Beweis Teil 2:

Behauptung: $\forall B \in F \; \exists B' \in G : B \cap B' \neq \emptyset \; und B \subset \widehat{B'}$

Beweis:

Sei $B \in F$, dann $\exists \; j : B \in F_j$ und da G_j maximal, existiert ein Ball

$$B' \in \bigcup_{k=1}^{j} G_k \; B \cap B' \neq \emptyset$$

Da aber: $diamB' \geq \frac{D}{2^j}$ und $diamB \leq \frac{D}{2^{j-1}}$

$\Rightarrow diamB \;\; \leq 2 \; diamB'$

und es folgt: $B \subset \widehat{B'}$ □

Korrolar 1

Sei F eine feine Überdeckung von A mit abgeschlossenen Bällen und

$sup\{diamB \mid B \in F\} < \infty$,

dann gibt es eine abzählbare Familie G aus disjunkten Bällen in F, so dass für jede endliche Teilmenge $\{B_1, ..., B_m\} \subset F$ gilt:

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \bigcup_{B \in G \setminus \{B_1,...,B_m\}} \widehat{B}$$

Beweis:

Sei G wie eben und $\{B_1, ..., B_m\} \in F$

1. falls $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k \Rightarrow$ fertig
2. falls nicht sei $x \in \{A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k\}$
   Da alle $B \in F$ abgeschlossen sind und F eine feine Überdeckung :
   $\exists\ B \in F : x \in B\ und\ B \cap B_k = \emptyset\ k = 1, 2, 3, ...$
   aber: $\exists B' \in G,\ so\ dass\ B \cap B' \neq \emptyset\ und\ B \subset \widehat{B'}$

$\square$

Korollar 2

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ *offen und* $\delta > 0$

Es existiert eine abzählbare Menge aus disjunkten abgeschlossenen Bällen in U, so dass $diamB \leq \delta \quad \forall B \in G$ und

$$\mathcal{L}^n(U \backslash \bigcup_{B \in G} B) = 0$$

Beweis

(1) Sei $1 - \frac{1}{5^n} < \Theta < 1$ und angenommen $\mathcal{L}^n(U) < \infty$

(2) Behauptung:

Es existiert eine begrenzte Menge $\{B_i\}_{i=1}^{M_1}$ aus disjunkten abgeschlossenen Bällen in U, so dass $diam\ \{B_i\} < \delta\ mit\ i = 1, .., M_1$

$$\mathcal{L}^n(U \backslash \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \leq \Theta \mathcal{L}^n(U)$$

$$\mathcal{L}^n(U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \leq \Theta \mathcal{L}^n(U)$$

Beweis der Behauptung:

Sei $F \equiv \{B \mid B \subset U,\ diam B < \delta\}$ und $\exists G_1 \subset F_1$, sodass $U \subset \bigcup_{B \in G_1} \widehat{B}$

$$\mathcal{L}^n(U) \leq \sum_{B \in G_1} \mathcal{L}^n(\widehat{B}) = 5^n \sum_{B \in G_1} \mathcal{L}^n(B) = 5^n \mathcal{L}^n(\dot{\bigcup_{B \in G_1}} B)$$

somit $\mathcal{L}^n(\bigcup_{B \in G_1} B) \geq \frac{1}{5^n} \mathcal{L}^n(U)$

sodass $\mathcal{L}^n(U - \bigcup_{B \in G_1} B) \leq (1 - \frac{1}{5^n}) \mathcal{L}^n(U)$

Nun sei $U_1 \equiv U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i$ und $F_2 \equiv \{B \mid B \subset U_1, diamB < \delta\}$

$\{B_{M_1+1}, ..., B_{M_2}\} \in F_2$ sodass:

$$\mathcal{L}^n(U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_2} B_i) = \mathcal{L}^n(U_1 \setminus \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i)$$

$$\leq \Theta \mathcal{L}^n(U_1) \leq \Theta^2 \mathcal{L}^n(U)$$

Iteration: $\mathcal{L}^n(U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_k} B_i) \leq \Theta^k \mathcal{L}^n(U)$

für $\Theta^k \longrightarrow 0 \Rightarrow$ Beh. $\quad \mathcal{L}^n(U - \bigcup_{B \in G} B) = 0$ $\square$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit und

viel Spaß beim Skifahren!