Stochastische Partielle Differentialgleichungen

Dominic Breit

14.12.2013

Outline

Brwonsche Bewegung (1)

Eine Brownsche Bewegung $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein zeitstetiger stochastischer Prozess mit folgenden Eigenschaften.

- Die Abbildung $[0, T] \ni t \mapsto W_t$ is $\mathbb{P}$-f.s. stetig;
- Es gilt $\mathbb{P}\{W_0 = 0\} = 1$;
- Die Zuwächse sind stochastisch unabhängig, d.h. für $t_3 > t_2 \geq t_1 > t_0$ sind $W_{t_3} - W_{t_2}$ und $W_{t_1} - W_{t_0}$ unabhängig.
- Die Zuwächse $W_t - W_s$ für $t > s$ sind $N(0, t - s)$ verteilt.

Brwonsche Bewegung (2)

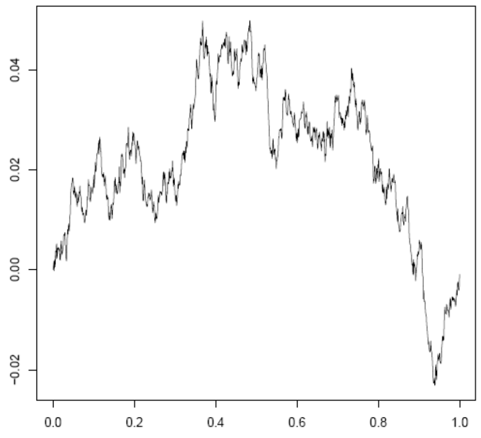

Abbildung: Brownsche Bewegung

Das Itô-Integral (1)

Für einen stochastischen Prozess $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ definieren wir

$$\int_0^t \sigma_s \, dW_s := \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\frac{i-1}{N}t}\Big(W_{\frac{i}{N}t} - W_{\frac{i-1}{N}t}\Big).$$

- Gegeben sei eine Filtration $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq 1\}$ mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für $0 \leq s \leq t \leq T$;
- Der Prozess $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ ist an die Filtration adaptiert, d.h. σ_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar für alle t;
- Konvergenz in $L^2(\Omega; C^0([0,T]))$, falls $\sigma \in L^2(\Omega \times (0,T); \mathbb{P} \otimes \mathcal{L}^1)$.

Das Itô-Integral (2)

Für einen stochastischen Prozess $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ definieren wir

$$\int_0^t \sigma_s \, dW_s := \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\frac{i-1}{N}t}\Big(W_{\frac{i}{N}t} - W_{\frac{i-1}{N}t}\Big).$$

- Wir erhalten $\mathbb{E}\big[\int_0^t \sigma_s \, dW_s\big] = 0$;
- Es gilt falls der Prozess σ bekannt ist

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^t \sigma_s \, dW_s \middle| (\sigma_s)_{s\in[0,t]}\right] = \int_0^t \sigma_s^2 \, ds;$$

- Stochastische Integrale können auch bzgl. allgemeineren Prozessen gebildet werden.

Differentialschreibwese

Finde stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in [0,T]}$ mit

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \quad X(0) = X_0.$$

- $\mu, \sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und Lipschitz stetig in X, d.h.

$$|\mu(t, X) - \mu(t, Y)| \leq L_\mu |X - Y|;$$

- X_0 zufälliger Startwert;
- Als System $\mathbf{X} = (X^1, ..., X^N)$ mit $\boldsymbol{\mu} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N \times N} \to \mathbb{R}^N$ und $\mathbf{W} = (W^1, ..., W^N)$.

Integralschreibweise

Finde stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

Idee: Picard-Ieration.

- $X_t^n := X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s^{n-1})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})\, dW_s$;
- Außerhalb einer $\mathbb{P}$-Nullmenge N gilt

$$\sup_{t\in(0,T)} |X^m(t) - X^n(t)| \longrightarrow 0, \quad m, n \to \infty;$$

- $(X^n \chi_{\Omega\setminus N\times[0,T]})$ konvergiert gleichmäßig gegen einen stetigen Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$.

Existenzsatz

Theorem

Sei ein Wahrscheinlichkeistraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Brownsche Bewegung $W = (W_t)_{t \in [0,T]}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben. Dann gibt es zu jedem $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ genau eine starke Lösung der stochastichen Differentialgleichung.

- Analog zum Staz von Picard-Lindelöff im deterministischen;
- starke Lösung: $X(0) = X_0$ $\mathbb{P}$-f.s.;
- schwache Lösung: die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X(0)$ und X_0 stimmen überein.

Itô's Lemma

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Semi-Martingal

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_t)\, dX_t + \int_0^t f''(X_t)\, d\langle X\rangle_t.$$

- $\langle X\rangle_t$ ist die quadratische Variation von $(X_t)_{t\in[0,T]}$:

$$\langle X\rangle_t := \lim_{|\Pi(t)|\to 0} \sum_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2;$$

  mit $\Pi(t) = \{0 = t_0, t_1, ..., t_m = t\}$ Zerlegung von $[0, t]$.
- Beispiel: $\left\langle \int_0^{\cdot} \sigma_s\, dW_s \right\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2\, ds$.

Wärmeleitungsgleichung mit Rauschen

Finde $u : \Omega \times (0, T) \times G \to \mathbb{R}$ mit

$$du = \Delta u \, dt + \Phi(u) \, dW_t, \quad u(0) = u_0,$$
$$u(t) = u_0 + \int_0^t \Delta u(s) \, ds + \int_0^t \Phi(u(s)) \, dW_s.$$

- $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig, z.B. $\Phi(u) = |u|$;
- $u_0 \in L^2(\Omega \times G; \mathbb{P} \times \mathcal{L}^d)$ zufälliger Startwert;
- Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $u(\omega, \cdot, \cdot) \to \mathbb{R}$ Funktion in Raum und Zeit.

Schwache Formulierung

Finde $u : \Omega \times (0, T) \times G \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_G u(t)\,\varphi\,dx = \int_G u_0\,\varphi\,dx - \int_0^t \int_G \nabla u(s) \cdot \nabla \varphi\,dx\,ds + \int_0^t \int_G \varphi\,\Phi(u(s))\,dx\,dW_s$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\mathbb{P} \times \mathcal{L}^1$-f.ü.

- $u \in L^2(\Omega; L^\infty(0, T; L^2(G))) \cap L^2(\Omega; L^2(0, T; W_0^{1,2}(G)))$;
- Benutze Itô's Lemma für $f(u) = \frac{1}{2} \int_G |u|^2\,dx$.

Existenzsatz

Theorem

Sei ein Wahrscheinlichkeistraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Brownsche Bewegung $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben. Dann gibt es zu jedem $u_0 \in L^2(\Omega; L^2(G))$ genau eine Lösung u der stochastichen Wärmeleitungsgleichung.

- $u_0 \in L^2(\Omega; W^{k,2}(G))$ ergibt $u \in L^2(\Omega; C([0,T]; W^{k,2}(G)))$;
- Die Brownsche Bewegung ist nirgendwo differenzierbar $\Rightarrow$ keine Zeitableitungen von u;
- Beweis: Galerkin-Ansatz, Halbgruppen.

Galerkin-Ansatz

Schreibe $u^N = \sum_{k=1}^N c_k^N(\omega, t) e_k(x)$ mit

$$dc_k = -\lambda_k c_k + \int_G e_k \, \Phi(u^N(s)) \, dx \, dW_s,$$

$$c_k(0) = \int_G u_0 \, e_k \, dx.$$

- (e_k) ONB des $L^2(G)$ aus EV des Laplace-Operators:

$$\int_G e_k \, e_j \, dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_G \nabla e_k \cdot \nabla e_j \, dx = \delta_{kj};$$

- System stochastischer Differentialgleichungen für $\mathbf{C}^N = (c_1^N, \ldots, c_N^N)$.

Halbgruppen

Sei $\mathcal{S}$ die von Δ erzeugte Halbgruppe

$$(\mathcal{K}u)(t) := \mathcal{S}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\Phi(u(s))\,dW_s.$$

- ODE: $y' = Ay$, $y(0) = y_0 \Rightarrow y = e^{tA}y_0$;
- PDE: $\partial_t u = \Delta u$, $u(0) = u_0 \Rightarrow u = e^{t\Delta}u_0$;
- Halbgruppe entspricht $(\mathcal{S}(t))_{t\in[0,T]}$ mit $\mathcal{S}(t) := e^{t\Delta}$;
- Zeige: $\mathcal{K}$ hat einen Fixpunkt.