LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher, Maximilian Wank

Wintersemester 2013/14
19.12.2013

Analysis einer Veränderlichen

Probeklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor, PO ❏ 2007 ❏ 2010 ❏ 2011 Master, PO ❏ 2010 ❏ 2011

Lehramt Gymnasium: ❏ modularisiert ❏ nicht modularisiert

❏ Diplom ❏ Anderes: ______________

Hauptfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch. Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, einseitig per Hand beschriebene A4 Seite in der Klausur zu benutzen. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, vermerken Sie dies am unteren Ende des Angabenblattes der entsprechenden Aufgabe und schreiben den Rest auf die Rückseite oder auf eine von uns ausgehändigte leere Seite. Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die nebenstehende Zahl unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
max. Punkte	**3**	**2**	**4**	**4**	**3**	**3**	**4**	**2**	**2**
Punkte									

Σ Gesamt (max. 27)	

Viel Erfolg !

Name: ______________________________

Aufgabe 1 **3 Punkte**

Beweisen Sie die Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

mittels vollständiger Induktion.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 2 **2 Punkte**

Sei

$$a_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_n$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Beweisen Sie mit der Eulerschen Formel (d.h. mit Hilfe der Definition von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die komplexe Exponentialfunktion) die Gleichung

$$\cos(3x) = 4(\cos(x))^3 - 3\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei $M := \{(x,y) \,:\, x^2 + 3y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Ist M abgeschlossen? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Ist M kompakt? Begründen Sie ihre Antwort.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____

Aufgabe 5 **3 Punkte**

Es sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die zusätzlich der Gleichung $f(0) = f(2)$ genügt. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = f(\xi + 1)$ existiert.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 6 **3 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf A. Sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge aus A. Zeigen Sie, dass $(f(a_n))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 7 **4 Punkte**

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,2^n} x^n.$$

Bestimmen Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \text{die Reihe konvergiert}\} \text{ und } M_2 := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \text{die Reihe konvergiert absolut}\}.$$

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 8 **2 Punkte**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ genau dann beschränkt ist, wenn $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 9 **2 Punkte**

Sie (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie, dass es offene Bälle $B_r(x)$ und $B_s(y)$ gibt, so dass $B_r(x) \cap B_s(y) = \emptyset$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.