

Analysis einer Veränderlichen — Präsenzaufgaben 12

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4$

(b) $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$

(c) $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$

(d) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, wobei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ konvex ist.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, der Schnitt konvexer Mengen ist konvex. Finden Sie zwei konvexe Mengen, so dass die Vereinigung nicht konvex ist.

Aufgabe 4:

Sei $c \in \mathbb{R}$ und f differenzierbar, so dass

$$f'(x) = cf(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass $f(x) = ae^{cx}$ mit $a \in \mathbb{R}$.