

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 3

Aufgabe 1: (4 + 2) Punkte

Es gelte $x_n \rightarrow x$ in \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass

$$y_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n} x.$$

Zeigen Sie, dass die Rückrichtung falsch ist.

Aufgabe 2: (2+2+2) Punkte

- (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. Zeigen Sie, dass durch $d(x, y) := |f(x) - f(y)|$ eine Metrik auf \mathbb{R} definiert ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $|x_n - x| \xrightarrow{n} 0$ äquivalent ist zu $d(x_n, x) \xrightarrow{n} 0$.
- (c) Wir erweitern f durch $f(\infty) := 1$ und $f(-\infty) := -1$ zu einer Funktion auf $\overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass $d(x, y) := |f(x) - f(y)|$ eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert. Zeigen Sie weiterhin, dass $x_n \xrightarrow{n} \infty$ genau dann, wenn $d(x_n, \infty) \xrightarrow{n} 0$.

Aufgabe 3: (2+2) Punkte

Bestimmen Sie $\limsup_n x_n$ und $\liminf_n x_n$ für die Folgen:

- (a) $x_n := (-1)^n + 3^{-n}$,
- (b) $x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Aufgabe 4: (2+2) Punkte

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

- (a) $\left(\frac{n+1-n^2}{3n+n^3} \right)_n$
- (b) $a_0 := \frac{1}{4}$, $a_{n+1} := a_n^2 + \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{N}$

Hinweis zu (b): Zeigen Sie zunächst, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und monoton ist. Berechnen Sie daraufhin den Grenzwert.