Die Poincare-Ungleichung

Simon Strobl

LMU München

für das Hüttenseminar im WiSe 2012-13

Die Poincare Ungleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex und beschränkt; u $\in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt:

$$\|u - \bar{u}_\varphi\|_p \leq C\|\nabla u\|_p$$

Wobei $\bar{u}_\varphi = \int_\Omega u(y)\varphi(y)dy$ ein "gewichtetes Integral".

$\rightarrow$ Die Funktion u kann anhand ihrer Ableitung und Gegebenheiten auf dem Gebiet Ω abgeschätzt werden.

Im eindimensionalen Fall:

Sei $f : [0; d] \to \mathbb{R}$ stetig; $0 \leq t \leq d$ und $f(0) = 0$

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| = |\int_0^t f'(s)ds| \leq \int_0^d |f'(s)|ds$$

Über t integrieren ergibt:

$$\int_0^d |f(t)|dt \leq d \int_0^d |f'(s)|ds \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_1 \leq d\|\nabla f\|_1$$

Allgemeiner im $\mathbb{R}^n$:

Wir wollen $\int\limits_\Omega |u(x) - \bar{u}_\Omega|^p dx \leq C \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p dx$ beweisen!

Dazu sei:

- $x \in \Omega \subset B_R(x)$ konvex, beschränkt und $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$
- $\bar{u}_\Omega := \int\limits_\Omega u(y)\varphi(y)dy$ ein "gewichtetes Integral"

  wobei $\varphi(y) := \chi_\Omega(y)\frac{1}{|\Omega|}$

  und $\chi_\Omega(y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn y} \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ "Indikatorfunktion"

$$\int_\Omega \varphi(y)dy = 1$$

.

- $S = \{z : |z| = 1\}$ Einheitsball im $\mathbb{R}^n$
- $y \in \Omega$ in Kugelkoordinaten: $y = x + tz, t > 0, z \in S$
- $\delta(z) := sup\{t : x + tz \in \Omega\}$

Es gilt:

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_0^t |\nabla u(x + sz)| ds \leq \int_0^{\delta(z)} |\nabla u(x + sz)| ds \quad \circledast$$

Somit: $|u(x) - \bar{u}_\Omega| = |\int\limits_\Omega (u(x) - u(y))\varphi(y)dy| \leq \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega |u(x) - u(y)|dy$

$= \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_S (\int\limits_0^{\delta(z)} t^{n-1}|u(x) - u(x+tz)|dt)dz \qquad (\rightarrow \text{"Zwiebelformel"})$

$\leq \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_S (\int\limits_0^R t^{n-1}dt \int\limits_0^{\delta(z)} \frac{|\nabla u(x+sz)|}{s^{n-1}} s^{n-1}ds)dz \qquad (\circledast)$

$= \frac{1}{|\Omega|}\frac{R^n}{n}\int\limits_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy \qquad (\leftarrow \text{"Zwiebelformel"})$

$= \frac{R^n}{|\Omega|n}\int\limits_\Omega |\nabla u(y)||x-y|^{1-n}dy \qquad := C\ I_1(|\nabla u(x)|)\ (\text{mit } C = \frac{R^n}{|\Omega|n})$

$$\int_{\Omega} |u(x) - \bar{u}_{\Omega}|^p dx \leq C^p \int_{\Omega} |I_1(|\nabla u|)|^p dx \leq \tilde{C} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

$$\Rightarrow \|u - \bar{u}_{\Omega}\|_p \leq \tilde{C} \|\nabla u\|_p \qquad \text{für} \qquad u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$$

Schluss von $C^\infty(\Omega)$ auf $W^{1,p}(\Omega)$:

- C^∞ liegt dicht in $W^{1,p}$
- $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \exists u_n \in C^\infty(\Omega)$ mit: $u_n \to u$ in $W^{1,p}$

$$\Longrightarrow \quad \|u_n - u\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ und}$$
$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ Die Gleichung gilt auch in $W^{1,p}(\Omega)$

Ohne Mittelwert - mit Nullrandwerten:

- Sei $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\Omega \subset B_R(0)$ und $u \in W_0^{1,p}(B_R(0))$ und $\Omega' \subset B_R(0)$ mit $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$.
- Für u gilt somit: $u|_\Omega = \tilde{u}$ und $u|_{B_R(0) \setminus \Omega} = 0$
- Sei $\psi := \frac{1}{|\Omega'|}\chi_{\Omega'}$ und somit $\bar{u}_\psi = \int\limits_{B_R(0)} u(x)\psi(x)dx = 0$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \int_{B_R(0)} |u(x)|^p dx = \int_{B_R(0)} |u(x) - \bar{u}_\psi|^p dx$$

$$\leq C \int_{B_R(0)} |\nabla u(x)|^p dx = C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx$$

$$\Rightarrow \|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p$$