Die Perronsche Methode

Stephanie Seger

LMU München

Hüttenseminar 13.12.2012 - 16.12.2012

Lösung eines speziellen Randwertproblems

Existenz von Lösungen des klassischen Randwertproblems in beliebig beschränkten Gebieten

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \forall x \in \Omega \\ u &= 0 && \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei $g \in C(\partial\Omega)$
und Ω *ein beschränktes Gebiet des* $\mathbb{R}^n$
und

$$\Delta u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

- Wichtige Anwendungsinformation:

Existenzproblem im Inneren und Existenzproblem am Rand werden getrennt betrachtet!!!!

- *Vorwissen* :

⋆ **Lösung des Problems in Bällen:**

$$\text{Sei } g \in C^0(B)$$
$$\exists! h \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$$
$$\text{so dass } \Delta h = 0 \text{ in B und } h = g \; auf\, \partial B$$

⋆ **Starkes Maximumsprinzip:**

$\forall x \in B^\circ : h(x) = max \Rightarrow h(y) = max \Rightarrow \forall y \in B \Rightarrow$ **h ist konstant**

⋆ **Starkes Maximumsprinzip für subharmonsiche Funktionen:**

Sei $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = sup_\Omega u(x) \Rightarrow$ u ist konstant

$\forall y \in \Omega : u(y) \leq max_{\partial\Omega} u(y)$, wenn $u \in C(\Omega)$

Sub - und Superharmonischen Funktionen

- Subharmonische Funktionen im $C^0(\Omega)$:

$$\forall B \subseteq \Omega \text{ und } \forall h :$$
$$u \leq h \text{ auf } \partial B \Rightarrow \mathrm{u} \leq h \text{ in B}$$

- Superharmonische Funktionen im $C^0(\Omega)$:

$$\forall B \subseteq \Omega \text{ und } \forall h :$$
$$u \geq h \text{ auf } \partial B \Rightarrow \mathrm{u} \geq h \text{ in B}$$

- Subharmonische Lösung : $-\Delta u \leq 0$
- Superharmonische Lösung: $-\Delta u \geq 0$
- Harmonische Lösung: $-\Delta u = 0$

Harmonische Liftung

Sei u subharmonsich in Ω und B ein offener Ball mit Abschluss in Ω

Harmonische Liftung von u in B: $U(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & x \in B \\ u(x) & x \in \Omega - B \end{cases}$

mit $U(x) \in C(\Omega)$

Definition von $\tilde{u}(x) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(y)}{|x-y|^n} dy$

Beweis

Harmonische Liftung ist subharmonisch in Ω und $u \leq U$in B :

(i) u subharmonisch $\Leftrightarrow$ u$\leq$ U in Ω

$$u(x) \leq U(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & x \in B \\ u(x) & x \in \Omega - B \end{cases}$$

(ii) u subharmonisch $\Rightarrow$ U ist subharmonisch

$B^{'} \subset \Omega$: Sei h harmonische Funktion in $B^{'}$
$\Rightarrow$ U$\leq$ h auf $\partial B^{'}$
Da $u(x) \leq U(x) \Rightarrow$ u$\leq$ h in $B^{'}$
$\Rightarrow$ U$\leq$ h in $B^{'} - B \Rightarrow$ U$\leq$ h in $B \bigcap B^{'}$
$\Rightarrow$ U$\leq$ h in $B^{'}$ $\Rightarrow$ U subharmonisch in Ω

Die Perronsche Methode

$$\boxed{u_\varphi(x) = sup\ v(x) \text{ mit } v \in S_\varphi}$$

Perron-Klasse: $S_\varphi = \{v \mid -\Delta v \leq 0; v \leq \varphi \ \forall x \in \partial\Omega\}$

zu zeigen:

- (1) u_φ ist harmonisch in Ω
- (2) $\varphi \in C(\Omega)$ und $u_\varphi = \varphi \ \forall x \in \partial\Omega$

Beweis: Die Funktion $u_\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ ist harmonisch in Ω

(i) u_φ ist wohl definiert:

$v \equiv \min_{\partial\Omega} \varphi$ ist subharmonisch $\Rightarrow$ S_φ ist nicht leer

(ii) Es gibt $\forall x \in \Omega$ eine Folge $\{v_n\} \subset S_\varphi$ *mit* $\lim v_n(y) = u_\varphi(y)$

- Ersetze $v_n := \max\{v_1, v_2, ..., v_n, \inf_{\partial\Omega} \varphi\}$

$\rightarrow$ $\{v_n\}$ ist monoton steigend

$\rightarrow$ begrenzt von unten

- Harmonische Liftung von v_n in $B_R(y)$:

$$V_n(x) = \begin{cases} \tilde{v_n}(x) & \text{harmonisch in } B_R(y) \\ v_n(x) & x \in \Omega - B_R(y) \end{cases}$$

$\rightarrow$ $V_n(x)$ ist monoton steigend

mit: $\lim_{n\to\infty} V_n(y) = u(y)$ *mit* $V_n \in S_\varphi$

(iii) Kompaktheitstheorem:

Jede beschränkte Folge von harmonischen Funktionen auf Ω enthält eine Teilfolge, die gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf einem kompakten Teilgebiet von Ω konvergiert.

$\Rightarrow \{V_n\}$ enthält eine Teilfolge $\{V_{nk}\}$, die in $B_\rho(x)$ mit $\rho < R$ gegen eine harmonische Funktion v in B konvergiert

(iv) zeige: $v = u_\varphi$ in B$_\rho$:

- da u_φ ist Supremum : $v \leq u_\varphi \; \forall x \in B$
- Sei $x' \in B_\rho$ mit $u_\varphi(x') > v(x')$

$\Rightarrow \exists \overline{u} \in S_\varphi$ subharmonisch mit $u(x') > \overline{u}(x') > v(x')$

- Setze $w_k = max\{V_{n_k}, \overline{u}\}$

$\Rightarrow$Harmonische *Liftung* von W$_k$: Teilfolge von $\{w_k\}$ konvergiert gegen harmonische Funktion w inB_ρ mit $v \leq w \leq u$

$\Rightarrow$ v(y) = w(y) = u (y)

$\Rightarrow$ v $\equiv w$ in $B_\rho \Rightarrow$ Widerspruch zu $\overline{u}$

Beweis: $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ und $u_\varphi = \varphi \; \forall x \in \partial\Omega$

$\Rightarrow$ Randeigenschaft der Lösung

u_φ muss Grenzwerteigenschaft erfüllen :

Für $x \in \Omega$ ist $\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0)$
mit $x_0 \in \partial\Omega$ ein regulärer Randpunkt

Definition: Barrierefunktion und regulärer Randpunkt

1. Eine Funktion $w \in C(\bar{\Omega})$ heißt Barrierefunktion in einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$, wenn gilt:
(a) w ist superharmonisch in Ω $(-\Delta w \geq 0)$
(b) $w(x_0) = 0$
(c) $w(x) > 0$ in $\bar{\Omega} \backslash \{x_0\}$
2. Ein Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ heißt regulärer Randpunkt, falls es eine Barrierefunktion im Punkt x_0 gibt.

Vorraussetzungen für den Beweis:

- φ ist stetig in x_0:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$ mit $x \in \partial\Omega : | x - x_0 | < \delta \Rightarrow | \varphi(x) - \varphi(x_0) | < \frac{\varepsilon}{2}$

- w ist positiv und stetig auf $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$:

$\exists m > 0$ mit $x \in \bar{\Omega}$: $| x - x_0 | \geq \delta \Rightarrow$ w(x)$\geq m$

- Sei M $=$ $\sup_{x \in \partial\Omega} | \varphi(x) |$ und $k = \frac{2M}{m}$:

mit $x \in \bar{\Omega}$: $| x - x_0 | \geq \delta \Rightarrow$ k w(x) $\geq 2M$

Definiere Hilfsfunktionen:

- $\underline{v} := \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - kw(x)$

- Subharmonische Funktion in Ω
- $\underline{v} \leq \varphi(x) \; \forall x \in \partial\Omega \Rightarrow \underline{v} \in S_\varphi$

- $\overline{v} := \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + kw(x)$

- Superharmonische Funktion in Ω
- $\overline{v} \geq \varphi(x) \; \forall x \in \partial\Omega$

$\Rightarrow$ Es gilt $\varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + kw(x)$ in Ω

$\Rightarrow \mid u(x) - \varphi(x_0) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} + kw(x)$

Da $w(x) \to 0$ wenn $x \to x_0 \Rightarrow$ u (x) $\to \varphi(x_0)$ wenn $x \to x_0$

$\square$

Danke für eure Aufmerksamkeit!!!