Beschränktheit von Lösungen

Immanuel Maurer

LMU München

Hüttenseminar

Ziel des Vortrags

Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$Lu = -\nabla \cdot (A(x)\nabla u) = 0 \qquad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N)$$

mit

$$\frac{1}{\Lambda} I \leq A(x) \leq \Lambda I \qquad (\Lambda > 0)$$

Wir wollen zeigen, dass $u \in C^\alpha(\tilde{\Omega})$ und

$$\Big(\|u\|_{C^\alpha(\tilde{\Omega})} \leq \Big) \|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad (\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega)$$

1. Schritt: Beschränktheit der Lösungen

Wir zeigen zuerst, dass

$$\|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Dies folgt direkt aus

$$\|u^+\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Ansatz

Dazu zeigen wir, dass für alle Lösungen von $Lu = 0$ gilt:

$$\|u^+\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq 1$$

wenn wir $\|u^+\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \delta$ klein genug wählen. Dann ist auch $(\sqrt{\delta}/\|u^+\|_{L^2(\Omega)})u$ ist eine Lösung von Lu = 0 mit

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\|u^+\|_{L^2(\Omega)}}\|u^+\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq 1$$

und es folgt wie gewünscht

$$\|u^+\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad (C = \frac{1}{\sqrt{\delta}})$$

Definition von Hilfsfunktionen

Wir definieren die Hilfsfunktionen

$$u_k = (u - (1 - 2^{-k}))_+$$

und

$$U_k = \int_{B_k} |u_k|^2 dx$$

und zeigen, dass $U_k \to 0$ und somit $u_k \to 0$ (in B_k) für $k \to \infty$.

Beweisidee

Wir zeigen

$$U_{k+1} \leq C 2^{4k} U_k^{1+\frac{1}{N}}$$

Daraus folgt iterativ, dass für $k \to \infty$

$$U_{k+1} \leq C 2^{ak} U_0^{bk} \qquad (a, b \in \mathbb{R}_+)$$

Ist

$$U_0 = \|u^+\|^2_{L^2(\Omega)} < \left(\frac{1}{2}\right)^{a/b} = \delta$$

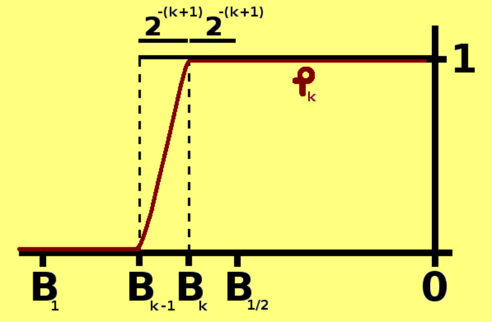
folgt $U_\infty = 0$ ($\xrightarrow[\text{Erinnerung}]{\text{zur}}$ $\|u^+\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq 1$)

Definition einer weiteren Hilfsfunktion

Sei φ_k eine Sequenz schrumpfender cut-off Funktionen

$$\varphi_k = \begin{cases} 1, & x \in B_k = \{|x| \leq \frac{1}{2}(1 + 2^{-k})\} \\ 0, & x \in B_{k-1}^C \end{cases}$$

mit $\|\nabla \varphi_k\| \leq C 2^k$



Kern des Beweises

Mit dieser Definition von φ_k kann man U_{k+1} schreiben als

$$U_{k+1} = \int_{B_{k+1}} (\varphi_{k+1} u_{k+1})^2 dx$$

$$\overset{\text{[Hölder]}}{\leq} \left(\int_{B_{k+1}} (\varphi_{k+1} u_{k+1})^p dx \right)^{2/p} \left| \{\varphi_{k+1} u_{k+1} > 0\} \right|^{2/N}$$

$$\overset{\text{[Sobolev]}}{\leq} \underbrace{C \int_{B_{k+1}} (\nabla[\varphi_{k+1} u_{k+1}])^2 dx}_{\leq C 2^{2k} U_k \quad \text{[Energy]}} \underbrace{\left| \{\varphi_{k+1} u_{k+1} > 0\} \right|^{1/N}}_{\leq 2^{2k} U_k^{1/N} \quad \text{[Chebyshev]}} \leq C 2^{4k} U_k^{(1+\frac{1}{N})}$$

Chebyshev Inequality

Mit der Chebyshev Ungleichung

$$\lambda|\{|f| > \lambda\}| = \int \chi_{\{f>\lambda\}} dx \leq \int_{f>\lambda} |f| dx \leq \int |f| dx$$

folgt

$$\underbrace{\left|\{(\varphi_{k+1}u_{k+1})^2 > 0\}\right|^{1/N} \leq \left|\{(\varphi_k u_k)^2 > 2^{-2k}\}\right|^{1/N}}_{\text{(falls } u_{k+1}>0 \text{ gilt } u_k>2^{-k}\text{) \& Def. } \varphi_k} \leq \underbrace{\left(2^{2k}\int(\varphi_k u_k)^2 dx\right)^{1/N}}_{\leq 2^{2k} U_k^{1/N}}$$

Energy Inequality

Wir erweitern $Lu = 0$ mit $\varphi^2 u$ und erhalten durch partielle Integration

$$\int_B \nabla^T(\varphi^2 u) A \nabla u dx \leq 0$$

und erhalten so

$$\int_{B_1} (\nabla[\varphi u])^2 dx \leq C \|\nabla \varphi\|_{L^\infty}^2 \int_{B_1 \cap \text{supp}\varphi} u^2 dx$$

daraus folgt

$$\int_{B_{k+1}} (\nabla[\varphi_{k+1} u_{k+1}])^2 dx \leq C 2^{2k} \int_{\text{supp}\varphi_{k+1}} u_{k+1}^2 dx \leq \underbrace{C 2^{2k} \int_{B_k} (\varphi_k u_k)^2 dx}_{= C 2^{2k} U_k}$$

2. Schritt: Hölderstetigkeit der Lösungen

Nun zeigen wir noch $u \in C^\alpha$. Ohne Beweis verwenden wir dazu

$$\mathrm{osc}_{B_{1/2}} \leq \lambda \mathrm{osc}_{B_1} u \qquad (\mathrm{osc}_D u = \sup_D u - \inf_D u)$$

und betrachten eine Folge sich halbierender Intervalle 2^{-k} um einen beliebigen Punkt $x_0 \in B_{1/2}$ herum

$$\sup_{|x_0 - x| \leq 2^{-k}} |u(x_0) - u(x)| \leq \mathrm{osc}_{B_{2^{-k}}} u(x_0) \leq \lambda^k \mathrm{osc}_{B_1} u(x_0) \leq \lambda^k 2 \|u\|_{L^\infty(B_1)}$$

Beweis der Hölderstetigkeit

Für $|x_0 - x| \leq 2^{-k}$ (und insbesondere für $|x_0 - x|^\alpha = 2^{-k\alpha}$) gilt

$$|u(x_0) - u(x)| \leq 2\|u\|_{L^\infty(B_1)}\lambda^k = C\lambda^k$$

und somit folgt für geeignetes α

$$|u(x_0) - u(x)| \leq C\lambda^k \stackrel{!}{=} C2^{-k\alpha} = C|x_0 - x|^\alpha$$

Also $u \in C^\alpha(B_{1/2})$ mit

$$\alpha = -\frac{\ln \lambda}{\ln 2}$$

.