Eigenschaften harmonischer Funktionen

Elisabeth Kleinert

LMU München

13.12.2012

Übersicht

- Mittelwertformel
- Maximumsprinzip
- Lage der Lösung
- Eindeutigkeit der Lösung von Poissongleichung
- Harnacksche Ungleichung

Mittelwertformel

Sei $u \in C^2(U)$ *harmonisch, genau dann gilt*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u \, dS = \fint_{B(x,r)} u \, dy$$

für jeden Ball $B(x,r) \subset U$

$\Rightarrow$

Setze $\varphi(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) = ⨍_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS(z)$

$\varphi'(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} Du(x+rz)\, z\, dS(z)$

$\varphi'(r) = \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy = 0$

also φ *konstant*

$\varphi(r) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} ⨍_{\partial B(x,t)} u(y)\, dS(y) = u(x)$

$\Leftarrow$ (*indirekter Beweis*)

Wenn $\Delta u \neq 0$, *existiert ein Ball* $B(x, r) \subset U$, *sodass* $\Delta u > 0$

Dann gilt

$$0 = \varphi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy > 0$$

im Widerspruch zur Annahme.

Maximumsprinzip

$U \subseteq R^n$ ist offen und beschränkt.

Sei $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ harmonisch.

(i) $\max\limits_{\bar{U}} u = \max\limits_{\partial U} u$ (schwaches Prinzip)

(ii) Existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit (starkes Prinzip)

$u(x_0) = \max\limits_{\bar{U}} u$

dann ist u konstant.

Beweis zu (ii)

Sei $x_0 \in U$ *mit* $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$.

Für $0 < r < dist(x_0, \partial U)$ *und der Mittelwertformel gilt*

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u \, dy \leq \fint_{B(x_0,r)} M \, dy = M \fint_{B(x_0,r)} 1 \, dy = M$$

$$\Rightarrow \; u(y) = M \;\; \forall \, y \in B(x_0, r)$$

Wenn U *zusammenhängend ist, folgt aus der Vereinigung* $\{x \in U \mid u(x) = M\}$ *die gewünschte Behauptung.*

Beweis zu (i)

$Annahme: \ u \neq konstant, \ und\ es\ existiert\ ein\ x_0 \ \in \ U\, mit$

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} \ u$$

$$Widerspruch\ zu\ (ii): \nexists \ x_0 \ \in U: \ u(x_0) = \max_{\bar{U}} \ u$$

$\Rightarrow max\ liegt\ auf\ \partial U$

Lage der Lösung

Sei das starke Maximumsprinzip erfüllt und $u \in C^2 \cap C(\bar{U})$ *erfüllt*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ U \\ u = g & auf\, \partial U \end{cases}$$

wobei $g \geq 0$

dann ist u *überall in* U *positiv, wenn* g *positiv ist.*

Ähnlich wenn $g \leq 0$ *ist.*

Eindeutigkeit der Lösung von Poissongleichung

Sei $g \in C(\partial U),\ f \in C(U)$.

Es existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$
von Poissongleichungen mit dem Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Wende für den Beweis das Maximumsprinzip an.

Beweis :

u *und* $\tilde{u}$ *erfüllen die o.g. Voraussetzungen. Wende das Maximumsprinzip auf die harmonische Funktion* $w = \pm(u - \tilde{u})$ *an.*

$$\Delta w = \Delta u - \Delta \tilde{u} = -f + f = 0$$

$$w_{|\partial U} = u_{|\partial U} - u_{|\partial \tilde{u}} = g - g = 0$$

$$\Rightarrow \max_{\bar{U}} w = \max_{\partial U} w = 0$$

$$analog: \min_{\bar{U}} w = \min_{\partial U} w = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq w \leq 0 \Rightarrow w = 0 = u - \tilde{u}$$

$$u = \tilde{u}$$

Harnacksche Ungleichung

Sei u eine harmonische Funktion und nicht negativ. Dann existiert für $V \subset\subset U$ zusammenhängend und offen eine positive Konstante C mit

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{1}{C}\, u(y) \leq u(x) \leq C\, u(y)\ \forall x,\ y\ \in V.$$

Sei $r := \frac{1}{4} dist(V, \partial U)$. *Sei* $x, y \in V, |x - y| \leq r$.

$$u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y)$$

$$\Rightarrow 2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y) \quad f\,r\ x, y \in V, |x-y| \leq r$$

Da V *zusammenhängend und* $\bar{V}$ *kompakt ist, wird* $\bar{V}$ *von Bällen* B_i *mit* $i = \{1, ..., N\}$ *und Radius* $\frac{r}{2}$ *abgedeckt.*

$$\Rightarrow u(x) \geq \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y)$$

$$\Longleftrightarrow 2^{n(N+1)} u(x) \geq u(y)$$

$$\Rightarrow C \ inf \ u \geq sup \ u$$