Existenz von schwachen Lösungen zu verallgemeinerten elliptischen Gleichungen

Kathrin Hötscher

LMU München

13.12.2012

Einführung

$$Lu = -\Delta u = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u = f \text{ in } U$$
$$u = g \text{ auf } \partial U$$

Lässt sich verallgemeinern:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = f \text{ in } U$$
$$u = g \text{ auf } \partial U$$

mit u Lösung, f, g Funktionen, L Operator, a^{ij} Koeffizientenfunktion sei $g = w \ \ w \in H^1(U)$

$$\begin{aligned} u &= w \\ u - w :&= \tilde{u} \\ u - w &= 0 \\ \Rightarrow L\tilde{u} &= \tilde{f} && \text{in } U \\ \tilde{u} &= 0 && \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

mit $\tilde{f} := f - Lw \in L^2(U)$

Von der klassischen zur schwachen Formulierung

$$Lu = f \text{ in } U$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial U$$

mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$, $u = u(x)$
$f : U \to \mathbb{R}$, L partieller Differentialoperator 2.Ordnung

$$\Rightarrow Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}$$

$a^{ij} \in L^\infty(U)$ $f \in L^2(U)$
Dieses Problem kann nicht klassich gelöst werden, da $\partial_i a$ nicht definiert ist
$\Rightarrow$ Schwache Lösung

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = f$$

1) Multiplikation mit v, $v \in C_c^\infty(U)$
2) Integration über u
3) Partielle Integration auf der linken Seite

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} = \int_U fvdx$$

Bilinearform und Schwache Lösung

Bilinearform

$$B[u,v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j}$$

mit $u, v \in H_0^1(U)$

Schwache Lösung

Wir sagen, $u \in H_0^1(U)$ ist eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$
\begin{aligned}
Lu &= f \text{ in } U \\
u &= 0 \text{ auf } \partial U
\end{aligned}
$$

wenn

$$B[u, v] = (f, v)$$

für alle $v \in H_0^1(U)$ und mit $(\, , \,)$ Skalarprodukt in $L^2(U)$ gilt.

Beweis Bilinearform

$$B[u,v] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j}$$

1) linear in jeder Komponente
2) Abschätzung von oben: $|\, B[u,v] \,| \leqslant \alpha \|u\| \|v\|$
3) Abschätzung von unten: $\beta \|u\|^2 \leqslant B[u,v]$
mit $u, v \in H$ und $\alpha, \beta > 0$

zu 1)

$$B[\lambda u, v] = \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} \lambda u_{x_i} v_{x_j} = \lambda B[u, v]$$

$$B[u, \lambda v] = \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} \lambda v_{x_j} = \lambda B[u, v]$$

$$\begin{aligned} B[u + \tilde{u}, v] &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} (u + \tilde{u})_{x_i} v_{x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} \tilde{u}_{x_i} v_{x_j} \\ &= B[u, v] + B[\tilde{u}, v] \end{aligned}$$

zu 2)

$$
\begin{aligned}
\mid B[u,v] \mid &= \mid \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mid \\
&\leqslant \int_U \mid a^{ij} \mid\mid u_{x_i} \mid\mid v_{x_j} \mid \\
&\leqslant \|a\|_\infty \int_U \mid \nabla u \mid\mid \nabla v \mid \\
&\leqslant \|a\|_\infty \left(\int_U |\nabla u|^2\right)^{0,5} \left(\int_U |\nabla v|^2\right)^{0,5} \\
&= \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}
$$

zu 3)

$$
\begin{aligned}
B[u,v] &= \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \\
&\geqslant \beta \int_U |\nabla u|^2 \\
&= \beta \|u\|^2
\end{aligned}
$$

Lax-Milgram Theorem

$B : H \times H \to \mathbb{R}$ ist eine bilineare Abbildung, für die Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren, so dass

$$| B[u, v] | \leqslant \alpha \|u\| \|v\|$$
$$\beta \|u\|^2 \leqslant B[u, v]$$

mit $u, v \in H$ gilt.
$f : H \to \mathbb{R}$ ist eine beschränkte und lineare Funktion auf H.
$\Rightarrow$ Es gibt ein eindeutiges Element u $\in H$, so dass

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle$$

für alle $v \in H$ gilt.

Beweis Lax-Milgram

Zeige: $B[u,v] = \langle f, v\rangle$

- Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes:
  es gibt ein eindeutiges Element $w \in H$, so dass $\langle f, v\rangle = (w, v)$, d.h. $B[u,v] = (w,v)$ mit $v \in H$ gilt.
- Wir definieren $w := Au$
  $\Rightarrow \mathrm{B}[u,v] = \langle Au, v\rangle$ mit u, v
- Wir zeigen, dass A linear und beschränkt ist; sei $A : H \to H$ ein linearer und beschränkter Operator.
  Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $u_1, u_2 \in H$ gilt für jedes $v \in H$:
  $(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) = B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] = \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] = \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) = (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v)$
  $\Rightarrow A$ ist linear, da diese Gleichung für alle v$\in H$ gilt.

- Es gilt: $\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leqslant \alpha\|u\|\|Au\|$
  $\Rightarrow A$ ist beschränkt, da diese Ungleichung für alle u$\in H$ gilt.

- Wir wollen zeigen, dass A bijektiv ist und $R(A)$ abgeschlossen ist in H.
  $R(A) = \{w \in H \mid Au = w\}$
  $\beta\|u\|^2 \leqslant B[u, u] = (Au, u) \leqslant \|Au\|\|u\|$
  $\beta\|u\| \leqslant \|Au\|$
  $ker(A) = 0$
  $\Rightarrow A$ ist bijektiv und $R(A)$ in H

- Wir zeigen, dass $R(A) = H$
  Angenommen dies gilt nicht, dann würde es ein von Null verschiedenes Element $w \in H$ mit $w \in R(A)^{\perp}$ geben:
  $\beta\|w\|^2 \leqslant B[w, w] = (Aw, w) = 0$ Widerspruch
  $\Rightarrow R(A) = H$

- Somit gilt: $B[u, v] = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v\rangle$

Zusammenfassung: Lax-Milgram

$B : H \times H \to \mathbb{R}$ ist eine bilineare Abbildung, für die Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren, so dass

$$| \; B\left[u,v\right] \; | \leqslant \alpha \|u\| \|v\|$$
$$\beta \|u\|^2 \leqslant B\left[u,v\right]$$

mit $u, v \in H$ gilt.
$f : H \to \mathbb{R}$ ist eine beschränkte und lineare Funktion auf H.
$\Rightarrow$ Es gibt ein eindeutiges Element u $\in H$, so dass

$$\underline{B\left[u,v\right] = \langle f, v\rangle}$$

für alle $v \in H$ gilt.