Darstellung harmonischer Funktionen

Renate Harbich

LMU Hüttenseminar

13. bis 16. Dezember

wichtige partielle Differentialgleichungen

- Laplace Gleichung
$$\triangle u = 0 \tag{1}$$
- Poisson Gleichung
$$-\triangle u = f \tag{2}$$

$u = u(x); x \in \overline{U}; u : U \to \mathbb{R}; U \subseteq \mathbb{R}; f : U \to \mathbb{R}; \triangle u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$

Definition: Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion u, mit $\triangle u = 0$ heißt **harmonische Funktion**.

Fundamentallösung der Laplace Gleichung

- Die Laplace Gleichung ist invariant unter Drehung
- definiere $u(x) = v(r)$ mit $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$
- wähle v so, dass $\triangle u = 0$ weiterhin gilt
- $\Rightarrow$ wir benötigen $\triangle u$ in Abhängigkeit von v

$\triangle u$ in Abhängigkeit von v

für $x \neq 0$

$$r'(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

$$u_{x_i} = v'(r)r'(x_i) = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

$$u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3})$$

also für $i = 1, ..., n$ gilt $\boxed{\triangle u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0}$

Fundamentallösung der Laplace Gleichung

sei $v' \neq 0$

umgeformt: $\frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r} = \log(|v'|)'$

außerdem gilt: $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ mit a konstant

falls $r > 0$

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c, & (n = 2) \\ \frac{b}{r^{n-2} + c}, & (n \geq 3) \end{cases}$$

also ergibt sich als Fundamentallösung der Laplace Gleichung für $x \in \mathbb{R}^n$ und $x \neq 0$

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases} \tag{3}$$

von Laplace zu Poisson

wir wissen nun, dass $x \to \Phi(x)$, $(x \neq 0)$ harmonisch ist.

Ebenso sind $x \to \Phi(x-y)$ und $x \to \Phi(x-y)f(y)$, $(y \in \mathbb{R}^n; x; f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ harmonische Funktionen.

$$\Rightarrow u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)f(y)dy, & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}dy, & (n \geq 3) \end{cases} \quad (4)$$

müsste die Laplace Gleichung lösen.

Problem: $D^2\Phi(x-y)$ ist in der nähe der Singularität nicht summierbar.

Poisson Gleichung

sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n) = \{f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | f \in C^2(\mathbb{R}^n) \wedge \text{ support}(f)\text{kompakt}\}$

alle 2 mal stetig differenzierbaren Funktionen, die einen kompakten Träger haben

wir zeigen, dass für unsere Vermutung von u(x) aus Gleichung (4) folgendes gilt:

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$
2. $- \triangle u = f$

u ist 2 mal stetig differenzierbar und löst die Poisson Gleichung

Beweis 1.Teil

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)dy$$

Nehmen wir nun $\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)[\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}]dy$

$$\Leftrightarrow u_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f_{x_i}(x-y)dy$$

für $h \neq 0$; $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, $i = 1, ..., n$; u_{x_i} existiert wegen der gl. Konvergenz bei Kompaktheit

nach gleichem Prinzip ergibt sich für die 2. Ableitung folgendes:

$$u_{x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f_{x_i x_j}(x-y)dy \quad \text{für} i, j = 1, ..., n$$

dieser Ausdruck ist stetig in x $\Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Beweis 2.Teil

sei $\varepsilon > 0$; definiere einen Ball um die Singularität

$$\triangle u(x) = \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \triangle_x (x-y)dy}_{I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \triangle_x (x-y)dy}_{J_\varepsilon}$$

$\Leftrightarrow$ (Satz von Green)

$$\triangle u(x) = I_\varepsilon - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \triangledown \Phi(y) \triangledown_y f(x-y)dy}_{K_\varepsilon} + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)dS(y)}_{L_\varepsilon}$$

ν ist der nach innen zeigende Normalenvektor

$$\Rightarrow \triangle u(x) = I_\varepsilon + K_\varepsilon + L_\varepsilon$$

Abschätzung I_ε

$$|I_\varepsilon| \leq C \left\| D^2 f \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \, dy \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 \left|\log \varepsilon\right|, & (n = 2) \\ C\varepsilon^2, & (n \geq 3) \end{cases}$$

- Anwendung der Jensenungleichung und der Hölderungleichung
- Der Laplace Operator entspricht der Spur der Hessematrix $(D^2 f)$
- Es handelt sich um die Menge aller Lebesgue messbarer Funktionen mit ∞-Norm
- Beim integrieren über die Fundamentallösung in der 2.Dimension, erhälte man für jede Dimension ein ε

Abschätzung K_ε

$$K_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \bigtriangledown\Phi(y) \bigtriangledown_y f(x-y)\, dy$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \triangle\Phi(y) f(x-y) dy}_{=0 \text{ da } \triangle\Phi=0} - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y) f(x-y)\, dS(y)$$

$$= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nu \bigtriangledown \phi(y) f(x-y)\, dS(y)$$

- Umformung 1 nach Satz von Green
- im folgenden wird man erkennen, warum bei der Fundamentallösung die Konstante b so gewählt wurde.

- mit $\bigtriangledown\Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n}$ mit $(y \neq 0)$
- und $\nu = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$ auf $\partial B(0, \varepsilon)$
- folgt: $\nu \bigtriangledown \Phi(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}$; $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ ist Oberfläche der ε-Kugel

$$\Rightarrow K_\varepsilon = -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\, dS(y)$$

$$\Leftrightarrow K_\varepsilon = -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)\, dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -f(x)$$

Abschätzung L_ε

$$|L_\varepsilon| \leq C \, \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \, dS(y) \leq \begin{cases} C\varepsilon \, |\log \varepsilon| \, , & (n = 2) \\ C\varepsilon, & (n \geq 3) \end{cases}$$

- gleiche Argumentation wie bei I_ε
- Rand der Kugel ist eindimensional

Zusammenführung

Insgesamt ergibt sich:

$$\triangle u(x) = \underbrace{I_\varepsilon}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0} + \underbrace{K_\varepsilon}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} -f(x)} + \underbrace{L_\varepsilon}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0} = -f(x)$$

Anmerkung: die Abschätzung im Betrag genügt, da folgendes gilt:

$|I\varepsilon| = 0 \Leftrightarrow I\varepsilon = 0$ für $(\varepsilon \to 0)$

Vielen Dank für die

Aufmerksamkeit