Harmonische Funktionen sind analytisch

Fabian Flohr

LMU München

Bruck am Ziller am 13.12.2012

Gliederung

Hilfsbeweise:

- harmonische Funktionen sind glatt, d.h. $u \in C^\infty(U)$
- Abschätzung von partiellen Ableitungen

Anwendungen:

- Anwendung der Abschätzung bei Liouville und Darstellungsformel
- Analytizität: Darstellung Harmonischer Funktionen durch Taylorreihe

Glattheit

Falls $u \in C(U)$ die Mittelwertbedingung $u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) d(Sy)$ für $\forall B(x,r) \subset U$ erfüllt, dann gilt $u \in C^\infty(U)$

Beweis:

Idee: Definiere u^ε, welche sich auf $U_\varepsilon = \{x \in U \,|\, d(x, \partial U) > \varepsilon\}$ wie u verhält und es gilt: $u_\varepsilon \in C^\infty(U); u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$; Zu zeigen: $u^\varepsilon(x) = u(x)$

technische Herleitung:

$$u^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{b(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)} udS\right) dr =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}u(x)\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\alpha(n)r^{n-1}dr =$$

$$= u(x)\int_{B(0,r)} \eta_\varepsilon dy = u(x)$$

$\Rightarrow u^\varepsilon = u$ in U_ε, damit ist auch $u \in C^\infty(U_\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$

$\square$

Abschätzung von partiellen Ableitungen

Sei u harmonisch auf U. Dann gilt folgende Abschätzung für jeden $B(x_0, r) \subset U$ und Mehrfachindex α mit $|\alpha| = k$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Für Konstanten C_k gilt: $C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}; C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha^n}$ für $k = 1, \ldots$

Beweis:

Induktion über k: $k = 0$

$$|u(x_0)| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \frac{1}{r^n} \int_{B(x_0,r)} |u| = C_0 \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$k=1$:(u_{x_i} ist harmonisch aufgrund von Laplace-Ungleichung)

$$|u_{x_i}(x_0)| = |\fint_{\partial B(x,r)} u(y)d(Sy)| =$$

$$= |\frac{2^n}{\alpha(n)r^n}\int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u\nu_i dS| \leq$$

$$\leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n}\int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} \|u\|_{L^\infty \partial B(x_0,r)} |\nu| dS \leq$$

$$\leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n}\|u\|_{L^\infty}\frac{r^{n-1}}{2^{n-1}}\alpha(n)n = \frac{2n}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2})}$$

Falls nun $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{2})$, dann gilt $B(x, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r) \subset U$ für:

$$k = 0 : |u(x)| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{1}{r}\right)^n \|u\|_{L^1 B(x_0,r))}$$

$$k = 1 : |D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1} n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1 B(x_0,r)}$$

Für $k \geq 2$ seien die oberen Aussagen für $\forall$ Bälle in U und $\forall \alpha$ mit $Ordnung \leq k - 1$ erfüllt. Sei $B(x_0, r) \subset U$ und $|\alpha| = k$; dann gilt:

$$D^\alpha u = \left(D^\beta u\right)_{x_i} fri \in (1, ..., n)\, und |\beta| = k - 1$$

$$|\alpha| = k : |D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{k}))}$$

Falls $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k}) : B(x, \frac{k-1}{r} r) \subset B(x_0, r) \subset U$.
Fall $|\beta| = k - 1$

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{C_{k-1}}{\left(\frac{k-1}{k} r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} =$$

$$= \frac{\left(2^{n+1} n\,(k-1)\right)^{k-1}}{\alpha(n) \left(\frac{k-1}{k} r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Durch die Kombination der beiden oberen Schätzungen folgt:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{\left(2^{n+1} n\,(k-1)\right)^{k-1})}{\alpha(n) r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$\Rightarrow |\alpha| = k$
$\Rightarrow$ Abschätzung gilt für harmonische Funktionen u.

$\square$

Theorem von Liouville

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und begrenzt, dann ist u auch konstant.

Beweis:

$x_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$:

$$|Du(x_0)| = |\begin{pmatrix} u_{x_1} \\ ... \\ u_{x_n} \end{pmatrix}| = \sqrt{|u_{x_1}|^2 + ... + |u_{x_n}|^2} \leq$$

$$= \sqrt{n \frac{(C_1)^2}{(r^{n+1})^2} \left(\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}\right)^2} = \sqrt{n} \frac{C_1}{(r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{n} C_1 \alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

für $r = \infty$

$\square$

Darstellungsformel

Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n), n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poisson-Gleichung: $-\triangle u = f$ in $\mathbb{R}^n$ die folgende Form:
$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy + C$

Beweis:

Da $\Phi(x) \to 0$ *bei* $|x| \to \infty$ *für* $n \geq 3$, *ist*
$\tilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy$ *beschränkte Lösung von* $-\triangle \tilde{u} = f$
Finde u(x) mit $-\triangle u = f$, *dann gilt für*
$w : \triangle w = \triangle u - \triangle \tilde{u} = f - f = 0 \Rightarrow$ *w harmonisch*
$\Rightarrow$ *w beschränkt + harmonisch = konstant (Liouville)*
$w = C$, *da* $u(x) = \tilde{u}(x) + C$

$\square$

Harmonische Funktionen sind analytisch

Sei u harmonisch auf U, dann ist u auch analytisch auf U.

Beweis:

Bestimme $x_0 \in U$*; Sei* $r = \frac{1}{4} d\left(x_0, \partial U\right)$ *und*
$M = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} < \infty$ *Sei* $B(x,r) \subset B(x_0, 2r) \subset U$ *für*
$\forall x \in B(x_0, r)$*, so folgt aus der Abschätzung die Schranke:*

$$|D^\alpha u|_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq$$
$$\leq \frac{\left(2^{n+1} n |\alpha|\right)^{|\alpha|}}{\alpha(n) r^{n+|\alpha|}} \|u\|_{L^1 B(x_0,r)} =$$
$$= M \left(\frac{2^{n+1} n}{r}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}$$

Abschätzung von $|\alpha|^{|\alpha|}$:

1. $|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}|\alpha|!$ wegen $\frac{k^k}{k!} < e^k$
2. $n^k = (1 + ... + 1)^k = \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \Rightarrow |\alpha|! \leq n^{|k|}\alpha!$
   $\Longrightarrow |\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}n^{|\alpha|}\alpha!$

Einsetzen:

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty B(x_0,r)} \leq M \left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} e^{|\alpha|}n^{|\alpha|}\}alpha! =$$

$$=\text{CM}\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!$$

Taylorreihe für u um $x_0 \in U$:
$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$

Annahme: Potenzreihe konvergiert für:
$|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+2} n^3 e} \Rightarrow$ beschränkt
Restgliedabschätzung: Schreib erste N Terme aus, Ziel ist

$$R_N = 0 R_N(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0) (x - x_0)^\alpha}{\alpha!} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u (x_0 + t (x - x_0)) (x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

Verknüpfung bisheriger Abschätzungen:

$$|R_N(x)| \leq CM \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2}n^3 e}\right)^N \frac{\alpha!}{\alpha!} \leq$$

$$\leq CM \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1}n^2 er}{r2^{n+2}n^3 e}\right)^N \leq$$

$$\leq CMn^N \frac{1}{(2n)^N} = \frac{CM}{2^N} \to 0 frN \to \infty$$

$\Rightarrow R_N \to 0$, damit u analytisch

$\square$