Analysis partieller Differentialgleichungen

Dominic Breit

Bruck am Ziller / Dec 15th 2012

Laplace-Gleichung

Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ äußere Kraft.

- Existenz,
- Eindeutigkeit,
- Regularität,

von Lösungen?

Klassische Lösungen

Finde $u : C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f \in C^0(\Omega)$ äußere Kraft.
$\Rightarrow$ Methode von Perron.

- Aufwendig,
- lässt sich nicht auf kompliziertere Gleichungen übertragen.

Schwache Lösungen

Finde $u \in X$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \quad \text{für alle } v \in X.$$

Wähle X, so dass

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

wohldefiniert ist und $(X, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ vollständig ist.
$\Rightarrow$ Hilbertraum-Theorie!

Lösungsraum (1)

Erster Ansatz:

$$X := \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}) : \; v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist wohldefiniert auf X.
- $(X, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ ist nicht vollständig.
  Siehe dazu $(C^0(\overline{\Omega}), \sqrt{(\cdot, \cdot)})$ mit

$$(u, v) := \int_\Omega u\, v\, dx.$$

Lösungsraum (2)

Zweiter Ansatz:

$$X := W_0^{1,2}(\Omega) := \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx < \infty, \ v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

$\Rightarrow (X, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ ist vollständig!
u heißt schwach diff'bar in Richtung $\gamma \in \{1, ..., n\}$, falls

$$\int_\Omega u \, \partial_\gamma \varphi \, dx = -\int_\Omega v_\gamma \, \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

für ein $v_\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Lösung mit Riesz

Theorem

Sei X ein Hilbertraum und $L \in X'$. Dann gibt es genau ein $u \in X$ mit

$$\langle u, v \rangle = L(v) \quad \textit{für alle } v \in X.$$

Sei $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow L(v) := \int_\Omega f\, v\, dx$ liegt in X'.
$\Rightarrow$ es existiert genau ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Motivation

- Sobolev-Funktionen haben i.a. sehr schlechte Eigenschaften sind z.B. unbeschränkt.
- Ist die schwache Lösung eine Lösung im klassischen Sinn?
- Konvergenz von numerischen Algorithmen:

$$\|u_h - u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq ch^{2k} \|\nabla^k u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

u_h ist eine approximative Lösung (FEM).

$W^{2,2}$-Regularität

Testen mit $\Delta u = \sum_\gamma \partial_\gamma^2 u$ ergibt

$$\begin{aligned}\sum_\gamma \int_\Omega \partial_\gamma \nabla u \cdot \partial_\gamma \nabla u \, dx &= -\int_\Omega f \, \Delta u \, dx \leq \int_\Omega |f||\Delta u| \, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |f|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |f|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Isgesamt also

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \, dx \leq \int_\Omega |f|^2 \, dx,$$

d.h. $u \in W^{2,2}(\Omega)$.

Höhere-Regularität

- $n = 3$: $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,6}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$ nach Sobolev.
- $\nabla f \in L^2(\Omega)$ ergibt $\partial_\gamma u$ löst

$$-\Delta(\partial_\gamma u) = \partial_\gamma f \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega |\nabla^3 u|^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx,$$

  d.h. $u \in W^{2,2}(\Omega)$.
- Iteration ergtibt: $f \in W^{k,2}(\Omega) \Rightarrow u \in W^{k+2,2}(\Omega)$.
- $f \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$ (u klassische Lösung!).

Elliptische Gleichungen

Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\pi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) &= 0 \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ elliptisch und g gegeben (regulär).

- Existenz und Eindeutigkeit mit Lax-Milgram.
- $A \in L^\infty(\Omega)$ ergibt $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.
- $A \in C^{0,1}(\Omega)$ ergibt $u \in W^{2,2}(\Omega)$.
- $A \in C^{0,1}(\Omega)$ ergibt $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Stationäre Navier Stokes-Gleichung

Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\pi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta u + (\nabla u)u &= \nabla \pi + f && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ äußere Kraft.

- Fluidmechanik: v Geschwindigkeitsfeld, π Druck.
- Existenz und Regularität von Lösungen.

Stationäre p-Navier Stokes-Gleichung

Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\pi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + (\nabla u)u &= \nabla\pi + f && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ äußere Kraft, $p \in (1, \infty)$.

- Nicht-Newtonsche Flüssigkeiten (Ketschup, Wasser-Stärke-Mischung).
- Existenz und Regularität von Lösungen hängt von p ab.