Prof. Dr. L. Diening
Dipl. Math. S. Schwarzacher
Dipl. Math. C. Warmt

09.02.2011

Klausur

Numerik – WS 2010/11

Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, einseitig per Hand beschriebene A4 Seite in der Klausur zu benutzen. Des weiteren ist die Verwendung eines Taschenrechners erlaubt. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt! Weiterhin müssen Sie die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch, damit wir Sie beim Kontrollieren möglichst wenig stören müssen.
Zum Bestehen der Klausur sind 14,5 Punkte notwendig. Bitte markieren Sie bitte die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben.

Dauer der Klausur: 8:15 bis 9:45 Uhr

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die folgende Zahl unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
max. Punkte	**2**	**2**	**3**	**4**	**3**	**3**	**3**	**4**	**2**	**4**	**3**	**3**
Punkte												

Σ Gesamt (max. 36)	

Viel Erfolg !

Aufgabe 1 **2 Punkte**

Geben Sie ein Beispiel für die Auslöschung bei der Subtraktion von Gleitkommazahlen an in $A(10,3,2)$, d.h. zur Basis 10 mit 3 Stellen für die Mantisse und 2 Stellen für den Exponenten.

Aufgabe 2 **2 Punkte**

Bestimmen Sie die relativen Konditionszahlen k_{ij} der Abbildung $f(x) := Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $x \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 **3 Punkte**

Sei Q eine orthonormale Matrix, d.h. $Q^T Q = I$. Zeigen Sie, dass $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle x, $\|Q\|_2 = 1$ und $\operatorname{cond}_2(Q) = 1$.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Bestimmen Sie $\|A\|_\infty$ und $\|A\|_2$. Bestimmen Sie $\operatorname{cond}_\infty(A)$ und $\operatorname{cond}_2(A)$.

Aufgabe 5 **3 Punkte**

Berechnen Sie mittels dividierter Differenzen das Interpolationspolynom, welches durch die Stützpunkte $(0,1)$, $(1,5)$ und $(2,3)$ geht.

Aufgabe 6 **3 Punkte**

Approximieren Sie das Integral

$$\int_0^1 2x^3 - 1\, dx$$

mit Hilfe der Mittelpunktregel und der Simpsonregel.

Aufgabe 7 **3 Punkte**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung LL^T von A.

Aufgabe 8 **4 Punkte**

Gegeben seien die Messpunkte

x_i	0	1	2	3
y_i	-1	1	5	5

Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade $y(x) = ax + c$.

Aufgabe 9 **2 Punkte**

Sei $f(x) := \sqrt{1+x^2} - 2$ für $x \geq 0$. Geben Sie die konkrete Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren an.

Aufgabe 10 **4 Punkte**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Problem $Ax = b$. Bestimmen Sie die Iterationsmatrizen des Jakobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens und ihre Spektralradien. Für welche a konvergieren jeweils die Verfahren.

Aufgabe 11 **3 Punkte**

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben sie das Gradientenverfahren zur Lösung der linearen Gleichung an und berechnen sie den 1. Iterationsschritt.

Aufgabe 12 **3 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit und symmetrisch und $b \in \mathbb{R}^n$. Sei

$$\mathcal{E}(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass jedes Minimum von $\mathcal{E}$ die Gleichung $Ax = b$ erfüllt.