Satz von Rellich-Kondrachov

Xaver Hellauer

LMU Munich, Germany

Haslach, 17. Februar 2012

Satz von Rellich–Kondrachov

- Sei $j : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ eine stetige Einbettung.
- Eine Einbettung heißt *kompakt*, falls beschränkte Folgen (x_n) durch j auf kompakte Folgen abgebildet werden.

Satz von Rellich–Kondrachov

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega) \qquad \forall t < \frac{pd}{d-p}$$

für $p < d$ kompakt.

Konvergenzsatz von Vitali

Sei $(f_k) \subset L^p(X,\mu)$ mit $1 \leq p < \infty$ und es gelte $f_k \to f$ μ-f. ü. sowie

$$\sup_k \int_E |f_k|^p d\mu \to 0, \text{ wenn } \mu(E) \to 0$$

und zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine μ-meßbare Teilmenge E_ε mit $\mu(E_\varepsilon) < \infty$ und

$$\sup_k \int_{X \setminus E_\varepsilon} |f_k|^p d\mu \leq \varepsilon.$$

Dann gilt $f \in L^p(X,\mu)$ und $f_k \to f$ in $L^p(X,\mu)$.

Beweis (1/2)

Zunächst kompakte Einbettung $\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.
Sei u_k in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ beschränkt.

- $\underline{p > 1}$:
  - Nach Übergang zu einer Teilfolge erhalten wir direkt $u_k \rightarrow: u$ in $L^p(\Omega)$.
- $\underline{p = 1}$:
  - Aus *Satz von Sobolev* folgt Beschränktheit von u in $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$
  - Nach Teilfolgenwahl folgt $u_k \rightarrow u$ in $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ und damit auch in $L^1(\Omega)$.

Wir setzen u_k und u auf $\mathbb{R}\backslash\Omega$ durch 0 fort

$$\Rightarrow u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \text{ ist mit Träger in } \bar{\Omega}.$$

Die Glättung $(u_k)_\varepsilon$ gehört dann zu $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$(u_k)_\varepsilon \xrightarrow{k\to\infty} u_\varepsilon \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

Beweis (2/2)

Seien $x \in \mathbb{R}^d$ fest, $\varepsilon > 0$. Definiere Funktionale $\Psi_\varepsilon^x \in L^p(\Omega)^*$ mit:

$$\Psi_\varepsilon^x(v) := \int\limits_\Omega v(y)\eta_\varepsilon(x-y)dy.$$

Daraus folgt

$$(u_k)_\varepsilon(x_k) = \int\limits_{B_\varepsilon(x_k)} \eta_\varepsilon(z-x_k)u_k(z)dz = \Psi_\varepsilon^{x_k}(u_k) \to \Psi_\varepsilon^x(u).$$

und damit

$$(u_k)_\varepsilon \to u_\varepsilon \text{ lokal gleichmäßig auf } \mathbb{R}^d$$

also auch in $L^p(\mathbb{R}^d)$, da $(u_k)_\varepsilon$ und (u_ε) außerhalb kompakter Mengen 0 sind.

Hilfsaussage (1/2)

Wir benötigen

$$\|v - v_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon \|\nabla v\|_p \qquad \forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

- beide Seiten der Ungleichung hängen stetig von v ab
- können wir die Ungleichung für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ zeigen, folgt der Rest durch Approximation

$$\begin{aligned}(v_\varepsilon - v)(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z-x)(v(z) - v(x))dz \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)(v(z+x) - v(x))dz \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z) \left(\int_0^1 \nabla v(x+sz) \cdot z \, ds \right) dz.\end{aligned}$$

Hilfsaussage (2/2)

$$\Rightarrow |(v - v_\varepsilon)(x)| \le \varepsilon \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z) \left(\underbrace{\int_0^1 |\nabla v(x+sz)| ds}_{:=F(x,z)} \right) dz.$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z) |F(x,z)| dz \right)^p dx \underset{\text{(Hölder)}}{\le}$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon^{\frac{1}{q}}(z) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(z) F(x,z) dz \right)^p dx \le$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(z) dz \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(z) |F(x,z)|^p dz \right) dx =$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,z)|^p dx \right) dz \le \sup_{z \in B_\varepsilon(0)} \int_{\mathbb{R}^d} |F(x,z)|^p dx.$$

Fortsetzung Beweis (1/2)

Aus $(u_k)_\varepsilon \xrightarrow{k\to\infty} u_\varepsilon$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ und Hilfsaussage folgt

$$\begin{aligned}\|u-u_k\|_p &\leq \|u-u_\varepsilon\|_p + \|u_\varepsilon-(u_k)_\varepsilon\|_p + \|(u_k)_\varepsilon - u_k\|_p \\ &\leq \|u-u_\varepsilon\|_p + \|u_\varepsilon-(u_k)_\varepsilon\|_p + \varepsilon\|\nabla u_k\|_p.\end{aligned}$$

Mit der Beschränktheit von ∇u_k in $L^p(\Omega)$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|u-u_k\|_p \leq c\varepsilon + \|u-u_\varepsilon\|_p.$$

Durch Wahl eines geeigneten ε folgt $\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ durch Approximation.

Fortsetzung Beweis (2/2)

Sei $(u_k) \subset \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ beschränkt. Nach Teilfolgenwahl konvergiert $u_k \to u$ in L^p und punktweise f. ü.

Satz von Sobolev $\Rightarrow$ (u_k) beschränkt in $L^{s(p)}(\Omega)$

Für $t < s(p)$ folgt mit Hölder (mit $\frac{s(p)}{t}$ und $\frac{s(p)}{s(p)-t}$)

$$\sup_k \int_E |u_k|^t dx \leq \sup_k \|u_k\|_{s(p)}^t \mathcal{L}^d(E)^{\frac{s(p)-t}{s(p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}^d(E)\to 0} 0.$$

Zu passendem $\delta > 0$ gibt es eine meßbare Menge $E_\delta \subset \Omega$ mit $\mathcal{L}^d(\Omega \backslash E_\delta) \leq \delta$ und

$$\sup_k \int_{\Omega \backslash E_\delta} |u_k|^t dx \leq \sup_k \|u_k\|_{s(p)}^t \mathcal{L}^d(\Omega \backslash E_\delta)^{\frac{s(p)-t}{s(p)}} \leq \varepsilon$$

Mit Konvergenzsatz von Vitali folgt $u_k \to u$ in $L^t(\Omega)$. $\square$

Zusammenhang zwischen $\mathrm{Lip}(\Omega)$ und $W^{1,\infty}(\Omega)$

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und konvex, so gilt $W^{1,\infty}(\Omega) = \mathrm{Lip}(\Omega)$, mit

$$\mathrm{Lip}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \mathrm{Lip}(u) := \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} < \infty \right\}.$$

  Insbesondere gilt $\|\nabla u\|_\infty = \mathrm{Lip}(\Omega)$.
- Für nichtkonvexe beschränkte Gebiete gilt $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Satz von Arzelà–Ascoli

- Charakterisierung der kompakten Teilmengen von $C^0(\overline{\Omega})$
- „zentrale“ Bedingung ist die *gleichgradige Stetigkeit*

Satz von Arzelà–Ascoli

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und für $(u_m) \subset C^0(\bar{\Omega})$ gelte:

1. Beschränktheit:
$$\sup_m \|u_m\|_\infty < \infty$$
2. Gleichgradige Stetigkeit:
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in \bar{\Omega}\, \forall m \quad \text{mit} \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |u_m(x)-u_m(y)| < \varepsilon$$

Dann gibt es eine in $C^0(\overline{\Omega})$ konvergente Teilfolge.

Beweis

- $\mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d \Rightarrow \Omega$ separabel $\Rightarrow \exists$ abzählbare dichte Teilmenge $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ von Ω.
- $(f_m(x_1))$ beschränkt in $\mathbb{R} \Rightarrow$ wählen konvergente Teilfolge $(f'_m(x_1))$.
- [. . .] Diagonalverfahren [. . .]
- Wir finden Folge $f_{m_k} \subset (f_m)$, so daß $g_k := f_{m_k}(x_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ konvergiert.
- müssen jetzt punktweise Konvergenz von g_k zeigen

Seien $x \in \Omega, \varepsilon > 0$ beliebig. Wegen gleichgradiger Stetigkeit folgt $\exists \rho = \rho(\varepsilon)$ mit

$$f_m(B_\rho(x)) \subset B_\varepsilon(f_m(x)) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Es gilt $|g_p(x_i) - g_q(x_i)| < \varepsilon$, falls $p, q \geq n_0 = n_0(\varepsilon, i)$. Für $\delta > 0$ gibt es ein $i > 1$ mit $x_i \subset B_\rho(x)$ und es folgt für alle $p, q \geq n_0$

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq |g_p(x) - g_p(x_i)| + |g_p(x_i) - g_q(x_i)| + |g_q(x_i) - g_q(x)| < 3\varepsilon.$$

$\Rightarrow g_k$ Cauchyfolge $\Rightarrow g(x) := \lim_k g_k(x)$ existiert für alle $x \in \Omega$.
Bleibt zu zeigen, daß g stetig ist und $g_k \xrightarrow{k \to \infty} g$ gleichmäßig.