Lebesgueräume und Konvergenztheoreme

Simon Meier

LMU München

Aufbau

1. Lebesgue-Räume
2. Konvergenztheoreme

LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Lebesgueräume

Definition

- Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum und gelte $1 \leq p \leq \infty$.
  $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda) := \{u : \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty] : \text{ u messbar, } ||u||_{L^p(\Omega,\mathfrak{B},\lambda)} < \infty\}$
  heißt Lebesgue-Raum
- $||u||_{L^p(\Omega,\mathfrak{B},\lambda)} := \begin{cases} (\int_\Omega |u|^p d\lambda)^{1/p} & p < \infty \\ \text{esssup } |u| & p = \infty \end{cases}$
- L^p-Räume sind vollständig, für alle $1 \leq p \leq \infty$,
  also Banach-Räume.

Hölder-Ungleichung

- Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum und seien $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- Seien $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$
- Dann ist $uv \in L^1(\Omega)$ und es gilt:

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

Beweis

- Für $p = 1, q = \infty$ klar
- Sei nun $1 < p, q < \infty$.
  OE $\|u\|_p > 0$ und $\|v\|_q > 0$. Nach Youngscher Ungleichung:
  $AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$ für alle $A, B \geq 0$. Setze $A := \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}$, $B := \frac{|v(x)|}{\|v\|_q}$.
  Integration liefert:
  $\frac{1}{\|u\|_p \|v\|_q} \int_\Omega |uv| \leq \frac{1}{||u||_p^p} (\int_\Omega |u|^p) + \frac{1}{||v||_q^q} (\int_\Omega |v|^q) = \frac{1}{p} \frac{||u||_p^p}{||u||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{||v||_q^q}{||v||_q^q} = 1.$

$\Rightarrow$ Behauptung

Minkowski-Ungleichung

Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum und gelte $1 \leq p \leq \infty$, sowie $u, v \in L^p(\Omega)$
$\Rightarrow u + v \in L^p(\Omega)$, und es gilt

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Der Hilbertraum L^2

- Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum, sowie $f, g \in L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda; H)$
- Dann definiert
$$\langle f, g \rangle_{(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda; H)} := \int_\Omega \langle f, g \rangle_{(H)} \, d\lambda$$
ein Skalarprodukt auf L^2
- Norm ist die L^2-Norm
$$||f||^2_{L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda; H)} = \int_\Omega ||f||^2_{(H)} d\lambda = \int_\Omega \langle f, f \rangle_{(H)} \, d\lambda$$

Beispiel

- Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \frac{1}{x}$
- $(\int_1^\infty |\frac{1}{x}|^2 dx)^{1/2} = (\int_1^\infty x^{-2} dx)^{1/2} = (\lim\limits_{b\to\infty} [-x^{-1}]_1^b)^{1/2} = (\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{b} + 1)^{1/2} = 1 < \infty$

$\Rightarrow$ f eine L^2-Funktion mit L^2-Norm 1

- f ist jedoch nicht L^1-Funktion

denn $\int_1^\infty \left|\frac{1}{x}\right|^1 \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} [\ln(x)]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \ln(b) = \infty$

Konvergenztheoreme

Definition

Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum
$u_n, u : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen

(i) $\{u_n\}$ konvergiert fast gleichmäßig gegen u , falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $E \in \mathfrak{B}$ existiert, so dass $\lambda(E) < \varepsilon$ und $\{u_n\}$ gleichmäßig konvergiert in $\Omega \setminus E$

(ii) $\{u_n\}$ konvergiert im Maß gegen u, falls für alle $\varepsilon > 0$,
$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in \Omega : |u_n(x) - u(x)| > \varepsilon\}) = 0$

Definition

Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum

Eine Familie $\mathfrak{F}$ von messbaren Funktionen $u : \Omega \to [-\infty, \infty]$ heißt

(i) gleichgradig integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\int_E |u_n| d\lambda \leq \varepsilon$, für alle $u \in \mathfrak{F}$ und für alle messbaren Mengen $E \subset \Omega$ mit $\lambda(E) \leq \delta$

(ii) p-gleichgradig integrierbar, $p > 0$, wenn die Familie von Funktion $\{|u|^p : u \in \mathfrak{F}\}$ gleichgradig integrierbar ist.

Monotone Konvergenz

Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum
Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer, messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, die λ-fast überall monoton wachsend gegen eine messbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ konvergiert, so gilt:
$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\lambda.$

Fatou's Lemma

- Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum
  Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, messbarer Funktionen $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt:
  $$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\lambda$$
- Analog gilt dieser Satz auch für den Limes superior
- Daraus resultiert:
  $\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\lambda \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\lambda \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda.$

Beweisidee

Wende auf die monoton wachsende Funktionenfolge
$g_n := \inf\limits_{k \geq n} f_k \nearrow \liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ Satz der monotonen Konvergenz an
Mit der daraus resultierenden Gleichung und der auf der Monotonie des Integrals basierenden Ungleichung
$\int_\Omega \left(\inf\limits_{k \geq n} f_k \right) \leq \int_\Omega f_n$, folgt:

$$\int_\Omega \liminf_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \left(\inf_{k \geq n} f_k \right) \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n$$

Satz von der majorisierten Konvergenz

Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum
Sei (f_n) eine Folge von $\mathfrak{B}$-messbaren Funktionen $f_n \colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
(f_n) konvergiere λ-fast überall gegen eine $\mathfrak{B}$-messbare Funktion f
Weiter werde (f_n) von einer λ-integrierbaren Funktion g auf L^p majorisiert
$\Rightarrow f$ und alle f_n sind in L^p und es gilt:
Die Folge (f_n) konvergiert gegen f im Sinne von L^p, d.h.
$\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = \lim\limits_{n\to\infty} (\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\lambda)^{1/p} = 0$

Vitali's Konvergenz Theorem

Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum
Sei $1 \leq p < \infty$ und seien $u_n, u : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen
Dann konvergiert $\{u_n\}$ gegen u in $L^p(\Omega)$ genau dann, wenn:

(i) $\{u_n\}$ konvergiert gegen u im Maß

(ii) $\{u_n\}$ ist p-gleichgradig integrierbar

(iii) für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein
$E \subset \Omega$ mit $E \in \mathfrak{B}$ so, dass $\lambda(E) < \infty$ und $\int_{\Omega \setminus E} |u_n|^p d\lambda \leq \varepsilon$ f.a. n

De la Vallée Poussin

Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, \lambda)$ ein Maßraum
Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $\mathfrak{F} \subset L^p$ eine beschränkte Menge.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $\mathfrak{F}$ ist p-gleichgradig integrierbar

ii) $\lim_{t\to\infty, u\in\mathfrak{F}} \sup \int_{\{x\in\Omega:|u|>t\}} |u|^p d\lambda = 0$

iii) Es existiert wachsende Funktion $\gamma : [0, \infty[\to [0, \infty[$, mit

$$lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{t} = \infty$$

so dass

$$sup_{u\in\mathfrak{F}} \int_\Omega \gamma(|u|^p) d\lambda < \infty$$