Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 17.06.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Präsenzaufgaben 9

Aufgabe 1:

(a) Sei

$$f : [-3,3] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) := \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t,$$

Geben Sie zwei monoton wachsende Funktionen $g, h : [-3,3] \to \mathbb{R}$ an, so dass $f = g - h$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$k : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad k(t) := \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

stetig, aber nicht von beschränkter Variation ist.

Aufgabe 2:
Auf dem Rand einer Einheitskreisscheibe sei ein Punkt markiert. Anfangs befinde sich der Mittelpunkt der Scheibe an der Stelle $(0,1)$ und der markierte Punkt an der Stelle $(0,0)$. Dann rolle die Scheibe ohne zu gleiten nach rechts auf der x-Achse, bis der markierte Punkt sich wieder auf der x-Achse befindet.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung dieser Kurve an.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

Aufgabe 3:
Sei $c > 0$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t) := (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t).$$

Die Kurve f heißt „logarithmische Spirale".

(a) Skizzieren Sie die Kurve für $c = 1/(2\pi)$ im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

(b) Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.

(c) Existiert $\lim_{a \to -\infty} L_{a,0}$?

Aufgabe 4:
Für $n \in \mathbb{N}$ gerade definieren wir

$$P_n := \{(r, \varphi) \in \{1\} \times [0, \tfrac{\pi}{2}] \,:\, \varphi = \tfrac{k\pi}{2n} \text{ mit } k = 0, \ldots, n\}.$$

und schreiben $p_{k,n} := (x_{k,n}, y_{k,n}) = (\cos(\frac{k\pi}{2n}), \sin(\frac{k\pi}{2n}))$. Zwischen benachbarten Punkten $p_{k,n}$ und $p_{k+1,n}$ definieren wir nun

$$q_{k,n} := (\cos(\tfrac{k\pi}{2n}), \sin(\tfrac{(k+1)\pi}{2n}))$$

und γ_n als den Polygonzug durch die Punkte

$$p_{0,n}, q_{0,n}, p_{1,n}, q_{1,n}, \ldots, p_{n-1,n}, q_{n-1,n}, p_{n,n}.$$

Außerdem sei für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ das Kreissegment $\tilde{\gamma}(t) := (\cos(t), \sin(t))$ definiert.

(a) Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\gamma}$ (*Hinweis:* Formel für den Kreisumfang).

(b) Berechnen Sie die Länge von γ_n (*Hinweis:* Zeichnung genügt).

(c) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ in Polarkoordinaten die Inklusion $\gamma_n \subset \{(r, \varphi) \in [1, 1+\varepsilon) \times [0, \frac{\pi}{2}]\}$ gilt.

(d) Warum konvergiert die Länge von γ_n (obwohl γ_n nie „zurück geht“) trotzdem nicht gegen die Länge von $\tilde{\gamma}$?