LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf, Maximilian Wank

Sommersemester 2014
15.09.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Nachholklausur

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________ Fachsemester: ____________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2007 ❑ 2010 ❑ 2011 Master, PO ❑ 2010 ❑ 2011

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: ____________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch. Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, beidseitig per Hand beschriebene A4-Seite in der Klausur zu benutzen sowie einen nicht-graphischen Taschenrechner. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, vermerken Sie dies am unteren Ende des Angabenblattes der entsprechenden Aufgabe und schreiben den Rest auf die Rückseite oder auf eine von uns ausgehändigte leere Seite. Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die nebenstehende Zahl, unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
max. Punkte	**3**	**4,5**	**2,5**	**3,5**	**2,5**	**3**	**3,5**
Punkte							

Σ Gesamt (max. 22,5)	

Viel Erfolg !

Name: ____________________

Aufgabe 1 **3 Punkte**

Sei $f \in C^1([0,1])$. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$

Achtung: Die Funktionenfolge $\sin(nx)$ konvergiert nicht punktweise.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 2 **4,5 Punkte**

Gegeben sei

$$\begin{aligned} f : (-\pi, \pi)^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Geben Sie alle lokalen Extrema der Funktion auf $(-\pi, \pi)^2$ an. (Es ist nicht nötig den Rand zu untersuchen.)

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 3 **2,5 Punkte**

Zeigen Sie, dass es genau ein $x_0 \in [0, \infty)$ gibt, welches die Gleichung $x = \ln(x^2 + 36)$ erfüllt. Benutzen Sie den Banach'schen Fixpunktsatz.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 4 **2,5+1 Punkte**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^z \\ 2y\cos(y^2) \\ e^z \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und Γ die Strecke von $(0, 0, 0)^T$ nach $(x, y, z)^T$. Berechnen Sie $\int_\Gamma v \cdot ds$ direkt mit der Definition des Wegintegrals.

(b) Geben Sie die Menge aller Stammfunktionen von v an (mit Begründung).

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ______________________________

Aufgabe 5 **2,5 Punkte**

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}$ und eine C^1-Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ gibt so, dass für alle $x \in U$ die Gleichung

$$x^5 + xg(x) + e^{g(x)} = 1$$

erfüllt ist. Geben Sie $g'(0)$ an.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 6 **2+1 Punkte**

Gegeben sei die Kurve

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \alpha(t) := (\cos t, \sin t, t).$$

(a) Bestimmen Sie die Länge der Kurve und parametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge.

(b) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve im Punkt $\alpha(\pi) = (-1, 0, \pi)$.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: ____________________

Aufgabe 7 **3,5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und sei $K_1, K_2, \ldots$ eine Folge nicht-leerer abgeschlossener Mengen in X, wobei $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte. Zeigen Sie, dass dann $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ nicht-leer ist.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.