

## Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

### Übungsblatt 10

#### Aufgabe 1:

5 Punkte

Finden Sie für folgende Kurven die Parametrisierung nach Bogenlänge:

- (a)  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, ct)$ , wobei  $c > 0$  sei;  
(b)  $\beta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\beta(t) := (t^2, t^3)$ .

#### Aufgabe 2:

5 Punkte

- (a) Zeigen Sie, dass für jedes  $k \in [0, 1]$  das uneigentliche Integral

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

existiert. ( $E(k)$  heißt vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung.)

- (b) Drücken Sie die Bogenlänge der Ellipse

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) := (a \cos t, b \sin t),$$

mit den Halbachsen  $a \geq b > 0$  mit Hilfe von  $E(k)$  aus.

#### Aufgabe 3:

(3+2) Punkte

Sei  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Weg der Länge  $\text{Var}(\alpha, [a, b])$  und  $Z = (t_0, \dots, t_N)$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ .

- (a) Zeigen Sie, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$|P| := \max_{i \in \{1, \dots, N\}} |t_i - t_{i-1}| < \delta \implies |\text{Var}(\alpha, [a, b]) - L^Z(\alpha)| < \varepsilon$$

existiert.

- (b) Zeigen Sie, dass für jede Umparametrisierung  $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$

$$\text{Var}(\alpha, [a, b]) = \text{Var}(\alpha \circ \varphi, [a', b'])$$

gilt.

#### Aufgabe 4:

5 Punkte

Seien  $p, q \in \mathbb{R}^3$  verschieden. Zeigen Sie, dass der kürzeste Weg, welcher die Punkte verbindet, die Strecke  $[p, q] := \{(1-t)p + tq : t \in [0, 1]\}$  ist.