Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 06.05.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: **(1+2) Punkte**

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Gamma-Funktion:

(a) $\lim\limits_{s \searrow 0} \Gamma(s) = \infty$;

(b) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Aufgabe 2: **(1+1+1+2+3) Punkte**

Berechnen Sie folgende Limiten:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(nx)^2 \cos(nx)\, dx$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 n \cdot \chi_{[0,1/n]}(x)\, dx$, wobei $\chi_{[0,1/n]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1/n], \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\, dx$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^n+1}}\, dx$; (*Hinweis*: Betrachten Sie $\frac{d}{dx} \log \frac{1+\sqrt{x^n+1}}{\sqrt{x^n}}$.)

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{n+1}} e^{-x^2}\, dx$.

Aufgabe 3: **(2+2) Punkte**

Der Raum $C^0([0,1])$ ist standardmäßig mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ausgestattet. Analog wird $C^1([0,1])$ standardmäßig mit der Norm $\|f\|_{C^1([0,1])} := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $D : C^1([0,1]) \to C^0([0,1]), f \mapsto f'$ ein beschränkter, linearer Operator ist. Bestimmen Sie die Operatornorm.

(b) Der Raum $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ebenfalls ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $D : (C^1([0,1], \|\cdot\|_\infty) \to C^0([0,1]), f \mapsto f'$ jedoch nicht beschränkt ist. (Achtung, wir versehen $C^1([0,1])$ mit einer unnatürlichen Norm.)

Aufgabe 4: **(2+3) Punkte**

Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit endlich vielen Nullstellen. Dann ist $x \mapsto \operatorname{sgn}(g(x))$ sprungstetig und damit integrierbar.

(a) Finden Sie Funktionen $g_n \in C^0([0,1])$ mit $\|g_n\|_\infty = 1$ und

$$\int_0^1 |g_n(x) - \operatorname{sgn}(g(x))|\, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

wobei sgn die Signumsfunktion sei.

(b) Berechnen Sie für

$$\begin{aligned} A_g : C^0([0,1]) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\, dx. \end{aligned}$$

die Operatornorm $\|A_g\|$ bezüglich der Supremumsnorm auf $C^0([0,1])$. (Hierfür dürfen Sie natürlich auch (a) ohne Beweis verwenden.)

Die Voraussetzung an die Nullstellen von g ist nicht notwendig. Allerdings würden wir für den Beweis dann Techniken benötigen, die uns erst später zur Verfügung stehen.