Die Wärmeleitungsgleichung

Karin Siferlinger

21.06.2012

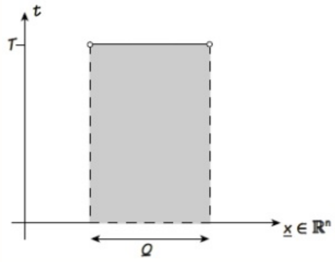
Outline

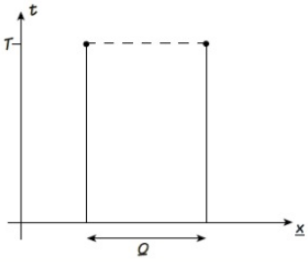
1. Das Maximumsprinzip
2. Die Wärmeleitungsgleichung im n-dimensionalen Raum

Sei Ω
offene, beschränkte, zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Definiere:

- $Q_T = \Omega \times (0, T]$
- $\partial' Q_T := (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$
  Parabolischer Rand von Q_T





Das schwache Maximumsprinzip

Sei $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$
mit $u_t - \Delta u \leq 0, \qquad (\mathbf{x}, t) \in Q_T$

dann gilt:

$$\max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{Q_T}} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t)$$

Analog:

$u_t - \Delta u \geq 0 \quad \textit{in } Q_T \qquad \Rightarrow$ *Min von u in* $\partial' Q_T$ *angenommen*

$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{in } Q_T \qquad \Rightarrow$ *Min und Max in* $\partial' Q_T$

Das schwache Maximumsprinzip - Beweis

- Sei $u_t - \Delta u < 0 \qquad (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$

Annahme:
Maximum über $\overline{Q_T}$ *in* $(\mathbf{x}_0, t_0) \notin \partial' Q_T, \quad mit\ \mathbf{x}_0 \in \Omega, 0 < t_0 \leq T.$

$\Rightarrow \partial^2_{\mathbf{x}_j} u(\mathbf{x}_0, t_0) \leq 0, \quad \partial_t u(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 0 \quad \ldots$

- Allgemein : $u_t - \Delta u \leq 0 \qquad (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$

Sei $\quad \mathrm{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - \varepsilon t \qquad mit$

$$\mathrm{v}_t - \Delta \mathrm{v} = u_t - \Delta u - \varepsilon < 0 \qquad f\ddot{u}r\ jedes\ \varepsilon > 0,\ (\mathbf{x}, t) \in Q_T$$

Für $\varepsilon \to 0$: $\qquad v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \to u(\mathbf{x}, t)\ gleichmäßig\ in\ \overline{Q_T} \quad \ldots$

Das Vergleichsprinzip

Seien u, v $\in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ mit

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{u}_t - \Delta u = f_1, & v_t - \Delta v = f_2 & (\mathbf{x}, t) \in Q_T \\
\mathrm{u} = \mathrm{g}_1, & v = g_2 & (\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T \\
\mathrm{u}|_{t=o} = h_1, & v\ |_{t=0} = h_2 & \mathbf{x} \in \Omega
\end{array}
$$

wobei $\mathrm{f}_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2$ stetig

mit $\mathrm{f}_1 \leq f_2,\ \ g_1 \leq g_2,\ \ h_1 \leq h_2.$

Dann gilt: $\mathrm{u} \leq v \qquad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T}$

Das Vergleichsprinzip - Beweis

Für w = u - v gilt:

$$w_t - \Delta w \leq 0 \qquad (\mathbf{x}, t) \in Q_T$$

$$w \leq 0 \qquad (\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T$$

Nach schwachem Maximumsprinzip:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &\leq \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{Q_T}} w(\mathbf{x}, t) \\ &= \max_{(\mathbf{x},t)\in\partial' Q_T} w(\mathbf{x}, t) \\ &\leq 0 \qquad \textit{für alle } (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q_T} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad u \leq v$$

Die Eindeutigkeitsaussage

Es existiert höchstens eine Lösung $\mathrm{u} \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$

für
$$\mathrm{u}_t - \Delta u = f \qquad (\mathbf{x}, t) \in Q_T$$
$$\mathrm{u} = \mathrm{g} \qquad (\mathbf{x},\mathrm{t}) \in \partial\Omega$$
$$\mathrm{u}|_{t=o} = h \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \qquad \text{wobei f, g, h stetig.}$$

Beweis: angenommen $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2$ sind Lösungen, so dass

für $\mathrm{u} = \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2$ gilt :
$$\mathrm{u}_\mathrm{t} - \Delta\mathrm{u} = 0 \qquad (\mathbf{x}, \mathrm{t}) \in \mathrm{Q}_\mathrm{T}$$
$$\mathrm{u} = 0 \qquad (\mathbf{x},\mathrm{t}) \in \partial\Omega$$
$$\mathrm{u}|_{t=o} = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Aus schwachem Maximumsprinzip folgt:
$$\mathrm{u}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = 0 \qquad \text{für alle } (\mathbf{x},\mathrm{t}) \in \overline{Q_T}.$$

Das starke Maximumsprinzip

Sei u $\in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$

mit $u_t - \Delta u \leq 0 \qquad (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$

Dann gilt: $u(\mathbf{x}, t) < \max_{(\mathbf{x},t)\in\partial' Q_T} \; u(\mathbf{x}, t)$

für alle $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$, es sei denn u ist konstant.

Ananlog: starkes Minimumsprinzip

Folgerung

u$\in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ erfülle

$$\begin{array}{ll} \mathrm{u}_t = \Delta u & (\mathbf{x}, t) \in Q_T \\ \mathrm{u} = 0 & (\mathbf{x},\mathrm{t}) \in \partial\Omega \\ \mathrm{u}|_{t=o} = g & \mathbf{x} \in \Omega \end{array}$$

wobei g $\in C(\overline{\Omega})$ die Eigenschaften g ≥ 0 und g $\not\equiv 0$ hat.

dann gilt:

$$u(\mathbf{x}, t) > 0 \qquad f\ddot{u}r\ alle\ (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Die Wärmeleitungsgleichung

homogene Gleichung: $\mathrm{u}_t - \Delta u = 0 \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$

mit Anfangsbedingung $\mathrm{u}|_{t=o} = g \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Besondere Lösung der homogenen Gleichung

Die Funktion $$\mathrm{K}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\, e^{\frac{-|\mathbf{x}|^2}{4t}} \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

(Gaußscher Kern)

hat folgende Eigenschaften:

1. Löst die Wärmeleitungsgleichung
2. Ist unendlich oft differenzierbar
3. $K(\mathbf{x}, t) > 0$
4. $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{K}(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 1$ für $\mathrm{t} > 0$.

Besondere Lösung der homogenen Gleichung - Beweis

1. K($\mathbf{x}$,t) radialsymmetrisch mit $r = |\mathbf{x}|$.

   Mit $\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r$ für radialsymmetrische Funktionen

   $\Rightarrow \quad K_t = \Delta K \quad f\ddot{u}r\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$

4. $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{K}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{-|\mathbf{x}|^2}{4t}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|\mathbf{y}|^2}\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)^n \quad = 1$$

Faltung mit Gaußschem Kern als Lösung

Es sei g stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{u}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{K}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

löst die homogene Wärmeleitungsgleichung mit

Anfangsbedingung $\quad \mathrm{u}|_{t=o} = g, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:

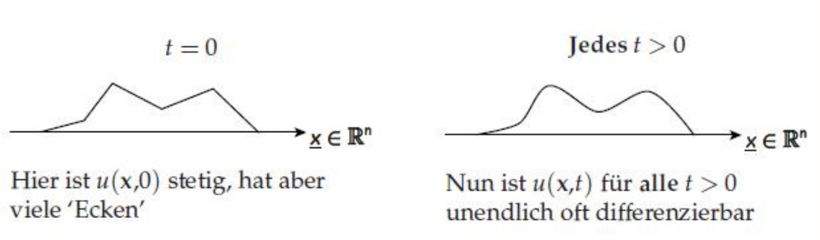
- $u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} (K_t(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) - \Delta K(\mathbf{x}-\mathbf{y},t))g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = 0$
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{z},t\to 0} \; u(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{z})$

Faltung mit Gaußschem Kern als Lösung

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{K}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

unendlich oft differenzierbar für $t > 0$

$\Rightarrow$ *sofortige Ausglättung des Anfangswerts*



Vielen Dank

für die

Aufmerksamkeit!