Der Satz von Sobolev

Franziska Lehermeier

14. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Der Satz von Sobolev ermöglicht es aufgrund von Informationen über den Gradienten von u Aussagen über die Funktion u selbst zu machen.

Dieser Einbettungssatz ist für die Regularitätstheorie von enormer Bedeutung.

Unter einer **„Einbettung“** versteht man eine Abbildung $j : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $(X, ||\cdot||_x)$ *und* $(Y, ||\cdot||_y)$ *mit* $X \subset Y$ *und* $j(x) = x \in Y$.

* Eine Einbettung heißt **„stetig“**, falls $||j(x)||_y \leq c||x||_x$ *mit* $x \in X$.

Beispiel

- Sei $u(x) = |x|, x \in (-1,1)$ $\quad u`(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ bel. & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow u \in C^0, \quad u \in W^{1,1}.$
- Sei $u \in W^{1,1}([0,1])$

$$u(0) = 0, \quad u(x) = \int_0^x u'(t)dt,$$

$$u(x_n) = \int_0^{x_n} u`dt \to \int_0^x u`dt, \quad x_n \to x,$$

$\Rightarrow u \in C^0([0,1]).$

Der Satz von Sobolev

Satz (Sobolev)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann sind die Einbettungen

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & ; \quad p < d \\ C^0(\overline{\Omega}) & ; \quad p > d, \mathcal{L}^d(\Omega) < \infty \end{cases}$$

stetig, d.h. für $c(d,p) > 0$ gilt

$$||u||_{\frac{dp}{d-p}} \leq c(d,p)||\nabla u||_p \quad ; \quad p < d$$

$$\sup_{\Omega} |u| \leq c(d,p)\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}}||\nabla u||_p \quad ; \quad p > d$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Korollar

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann gilt

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & ; \quad kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & ; \quad m \in \mathbb{N}_0, 0 \leq m \leq k - \frac{d}{p}, \mathcal{L}^d(\Omega) < \infty \end{cases}$$

Bemerkung

a) Sei p < d. Dann heißt $s(p) := \frac{dp}{d-p}$ mit sp > p der Sobolev-Exponent zu p.

z.B. $d = 3, p = 2,\ u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ergibt $u \in L^6(\Omega)$
$d = 2, p > 2,\ u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ergibt $u \in C^0(\overline{\Omega})$

b) *Ist* $u \in W_0^{1,d}(\Omega)$, so natürlich auch in $W_0^{1,p}(\Omega)$ für alle p < d, d.h. $W_0^{1,d}(\Omega) \subset \cap_{q<\infty} L^q(\Omega)$

<u>Beispiel:</u> $u(x) = ln|ln|x||, \quad B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$,

$$u \in W^{1,2}, \quad u \notin L^\infty.$$

Beweis von „Der Satz von Sobolev“

(1) Sei p=1. Wir betrachten zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$.
Sei zunächst d=2, dann gilt
$u(x) = u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2)dt = \int_{-\infty}^{x_2} \partial_2 u(x_1; t)dt$

Es folgt: $u^2(x) \leq \underbrace{(\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t, x_2)|dt)}_{:=\alpha(x_2)} \underbrace{(\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x_1, t)|dt)}_{:=\beta(x_1)}$ und damit:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(x_2)\beta(x_1)dx = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{x_2 \in \mathbb{R}} \alpha(x_2)\beta(x_1)dx_2 dx_1$$

$$= \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \beta(x_1)dx_1 \int_{x_2 \in \mathbb{R}} \alpha(x_2)dx_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u|dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u|dx$$

Für die L^2-Norm erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u| dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u| dx} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\partial_2 u| + |\partial_1 u|) dx \\ &= \frac{1}{2} ||\nabla u||_{L^1(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

Nun $1<p<\infty$:

1. Sei $v := |u|^\gamma$, mit $\gamma := \frac{(d-1)p}{d-p}$

2.Es gilt dann:$||v||_{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2}||\nabla v||_1$ (da $W^{1,1} \subset L^{\frac{d}{d-1}}$)

3.
$$||v||_{\frac{d}{d-1}} = \left(\int_\Omega |u|^{\frac{(d-1)p}{d-p}\cdot\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} = \left(\int |u|^{\frac{dp}{d-p}}\right)^{\frac{d-1}{d}},$$
$$||\nabla v||_1 \leq c\int |u|^{\gamma-1}|\nabla u| \leq c\left(\int |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} ||\nabla u||_p,$$
$$\Rightarrow \quad ||u||_{\frac{pd}{d-p}} \leq c||\nabla u||_p.$$

Zeige p>d durch Iteration:

1. Es gilt : $||u||_\infty \leq c||\nabla u||_p$ für alle $u \subset C_0^\infty$.

2. Sei $u \in W_0^{1,p} \Rightarrow u_k \in C_0^\infty$ mit $u_k \to u$ in $W_0^{1,p}$,d.h.

$$||\nabla u_k - \nabla u||_p \to 0.$$

3. Es fogt also: u_k ist Cauchyfolge in L^∞

$$\Rightarrow u_k \to u \text{ in } L^\infty \quad \Rightarrow u \in C^0(\overline{\Omega}).$$

$B_1(0) \subset \mathbb{R}^d, \quad u(x) = |x|^\gamma \quad \gamma \in \mathbb{R}$

$u \in L^p \quad \Leftrightarrow \quad p < -\frac{d}{\gamma}$

$|\nabla u| = \gamma |x|^{\gamma - 1}$

$\nabla u \in L^p \quad \Leftrightarrow \quad p < -\frac{d}{\gamma - 1}$

Wann ist u stetig??

Wenn $-\frac{d}{\gamma-1} > d$ erfüllt ist. $\qquad \Rightarrow \gamma > 0$

6.Der Satz von Sobolev, erweiterte Version

Satz (Sobolev,erweiterte Version)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann sind die Einbettungen

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & ; \quad p < d \\ C^0(\overline{\Omega}) & ; \quad p > d \end{cases}$$

stetig, d.h. für $c(d,p,\Omega) > 0$ gilt

$$||u||_{\frac{dp}{d-p}} \leq c(d,p,\Omega)||u||_{1,p} \quad ; \quad p < d$$

$$\sup_{\Omega} |u| \leq c(d,p,\Omega)||u||_{1,p} \quad ; \quad p > d$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & ; \quad kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & ; \quad m \in \mathbb{N}_0, 0 \leq m \leq k - \frac{d}{p}, kp > d \end{cases}$$

a) Die Einbettungen im Fall p>d können noch verschärft werden (Satz von Morrey):

- Die Räume $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ sind stetig und eingebettet in $C^{0,\gamma}$ mit $\gamma = 1 - \frac{d}{p}$.
- Die Räume $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\Omega)$ sind stetig eingebettet in $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit$\gamma = k - \frac{d}{p} - m$, falls $0 \leq m < k - \frac{d}{p} < m+1$

b) Für p=d gilt nicht$W_0^{1,d}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,
die Aussage $W_0^{1,d}(\Omega) \subset \cap_{q<\infty} L^q(\Omega)$ lässt sich jedoch noch verbessern:

<u>Es gilt:</u> $u \in W_0^{1,d}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega exp\left\{const|u - (u)_\Omega|\right\} dx < \infty$