MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 9
21.12.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten“

— Lösungsvorschlag —

66. a) Es ist

x	1	2	3	4	5	$\overline{x} = 3{,}000$
y	2,70	4,40	6,00	7,75	9,30	$\overline{y} = 6{,}03$
xy	2,70	8,80	18,00	31,00	46,50	$\overline{xy} = 21{,}40$
x^2	1	4	9	16	25	$\overline{x^2} = 11{,}00$

und damit

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{21{,}40 - 3{,}00 \cdot 6{,}03}{11{,}00 - 3{,}00^2} = 1{,}655$$

sowie

$$c = \overline{y} - m \cdot \overline{x} = 6{,}03 - 1{,}655 \cdot 3{,}00 = 1{,}065.$$

Insgesamt erhält man also $g(x) = 1{,}655\,x + 1{,}065$.

b) Es gilt

x	1	2	3	4	5
y	2,700	4,400	6,000	7,750	9,300
$g(x)$	2,720	4,375	6,030	7,685	9,340
$\lvert y - g(x)\rvert$	0,020	0,025	0,030	0,065	0,040

Die maximale Abweichung tritt also beim Wertepaar $(4; 7{,}75)$ auf.

67. a) Es ist

x	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	$\overline{x} = 3{,}00$
y	0,55	1,05	1,70	2,35	2,95	$\overline{y} = 1{,}72$
xy	0,55	2,10	5,10	9,40	14,75	$\overline{xy} = 6{,}38$
x^2	1,00	4,00	9,00	16,00	25,00	$\overline{x^2} = 11{,}00$

und damit

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{6{,}38 - 3{,}00 \cdot 1{,}72}{11{,}00 - 3{,}00^2} = 0{,}61$$

sowie

$$t = \overline{y} - m \cdot \overline{x} = 1{,}72 - 0{,}61 \cdot 3{,}00 = -0{,}11.$$

Insgesamt erhält man also $g(x) = 0{,}61\,x - 0{,}11$.

b) Für die Proportionalitätskonstante c — also für die Steigung der Ausgleichsgeraden — gilt

$$c = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}} = \frac{6{,}38}{11{,}00} = 0{,}58,$$

und man erhält $h(x) = 0{,}58\,x$.

68. Trägt man die vorliegenden Wertepaare in die vier Diagramme ein, so erkennt man, daß sie nur im $(\ln x, y)$–Diagramm im wesentlichen auf einer Geraden liegen; in den anderen drei Fällen liegen sie auf einer mehr oder weniger rechtsgekrümmten Kurve. Es ist also

$$y = 0,510 \cdot \ln x + 4,042$$

Die Werte von x und $\ln y$ sowie die Parameter der anderen Ausgleichsgeraden werden hierfür nicht benötigt.

69. a) Es ist

$$y = a\,e^{\lambda x} \iff \ln y = \ln(a\,e^{\lambda x}) = \ln a + \lambda \cdot x$$

b) Es ist

x	1	2	3	4	5	$\overline{x} = 3{,}000$
$\ln y$	0,956	1,194	1,435	1,686	1,960	$\overline{\ln y} = 1{,}446$
$x \ln y$	0,956	2,388	4,305	6,746	9,800	$\overline{x \ln y} = 4{,}839$
x^2	1	4	9	16	25	$\overline{x^2} = 11{,}000$

und damit

$$\lambda = \frac{\overline{x \ln y} - \overline{x} \cdot \overline{\ln y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{4{,}839 - 3{,}000 \cdot 1{,}446}{11{,}000 - 3{,}000^2} = 0{,}251$$

und

$$\ln a = \overline{\ln y} - \lambda \cdot \overline{x} = 1{,}446 - 0{,}251 \cdot 3{,}000 = 0{,}695, \quad \text{also} \quad a = 2{,}003$$

Also gilt $a = 2{,}00$ und $\lambda = 0{,}25$.

c) Es ist

x	1	2	3	4	5
y	2,600	3,300	4,200	5,400	7,100
$a\,e^{\lambda x}$	2,568	3,297	4,234	5,437	6,981
$\lvert y - a\,e^{\lambda x}\rvert$	0,032	0,003	0,034	0,037	0,119

Die maximale Abweichung tritt also beim Wertepaar $(5; 7{,}10)$ auf.

70. Die Wertepaare $(\lg I_i, L_i)$ liegen auf einer Geraden. Es ist

$$m = \frac{\overline{\lg I \cdot L} - \overline{\lg I} \cdot \overline{L}}{\overline{(\lg I)^2} - (\overline{\lg I})^2} = \frac{-239,8 - (-4,52) \cdot 74,83}{30,54 - (-4,52)^2} = 9,74$$

und

$$c = \overline{L} - m \cdot \overline{\lg I} = 74,83 - 9,74 \cdot (-4,52) = 118,9.$$

Damit ist

$$L = 9,74 \cdot \lg I + 118,9$$

die bestmögliche Formel für L als Funktion von $\lg I$ mit

$\lg I_i$	$-8,25$	$-7,32$	$-5,92$	$-4,47$	$-2,30$	1,12
$9,74 \lg I_i + 118,9$	38,5	47,6	61,2	75,4	96,5	129,8
L_i	38	48	61	75	97	130

71. a) Es ist

$$k = k_0 \, e^{-bT^{-1}} \iff \ln k = \ln k_0 - b\,T^{-1}$$
$$\iff \text{Die Paare } (T_i^{-1}, \ln k_i) \text{ liegen auf einer Geraden.}$$

mit

T^{-1}	$3,33 \cdot 10^{-3}$	$2,86 \cdot 10^{-3}$	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^{-3}$	$2,00 \cdot 10^{-3}$
$\ln k$	15,88	17,22	18,18	18,95	19,58

Die Wertepaare $(T_i^{-1}, \ln k)$ liegen im wesentlichen auf einer Geraden, die Arrheniusgleichung ist also erfüllt.

b) Es ist

$$-b = \frac{\overline{T^{-1} \ln k} - \overline{T^{-1}} \cdot \overline{\ln k}}{\overline{(T^{-1})^2} - \left(\overline{T^{-1}}\right)^2} = \frac{-6,162 \cdot 10^{-4}}{2,227 \cdot 10^{-7}} = -2767$$

also $b = 2.767$ und

$$\ln k_0 = \overline{\ln k} + b\,\overline{T^{-1}} = 25,1$$

c) Es ist

$$E_a = b \cdot R = 2.767 \text{ K} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 23,0 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

72. a) Es ist

$$s = a\,m^b \iff \ln s = \ln a + b \ln m$$

mit

$\ln m$	$-3,77$	$-0,69$	0,56	1,10	1,61	1,95
$\ln s$	$-1,33$	$-0,20$	0,53	0,69	0,88	0,99

Die Wertepaare $(\ln m_i, \ln s_i)$ liegen im wesentlichen auf einer Geraden, so daß $\ln s$ als lineare Funktion von $\ln m$ und damit s als allgemeine Potenzfunktion von m aufgefaßt werden kann.

b) Es ist

$$b = \frac{\overline{(\ln m)(\ln s)} - \overline{\ln m} \cdot \overline{\ln s}}{\overline{(\ln m)^2} - (\overline{\ln m})^2} = \frac{1,90 - 0,15 \cdot 0,32}{4,52 - 0,15^2} = 0,41$$

und

$$\ln a = \overline{\ln s} - b \cdot \overline{\ln m} = 0,32 - 0,41 \cdot 0,15 = 0,26 \qquad \text{also} \quad a = 1,30.$$

Man erhält folglich $s = 1,30 \cdot m^{0,41}$.

c) Es ist

$$
\begin{aligned}
s &= 1,30 \cdot 17^{0,41} = 4,15 \\
m &= \left(\frac{s}{1,30}\right)^{\frac{1}{0,41}} = \left(\frac{7,5}{1,30}\right)^{\frac{1}{0,41}} = 71,8
\end{aligned}
$$