MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 7
07.12.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten"
– Lösungsvorschlag –

49. a) Das bestimmte Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ gibt den Inhalt der vom Graphen G_f und der x–Achse zwischen a und b eingeschlossenen Fläche an; dabei wrden sowohl die oberhalb als auch die unterhalb der x–Achse liegenden Teilflächen positiv gezählt.

b) Es ist

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_0^2 |f(x)|\,dx &= \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_1^2 |f(x)|\,dx \\ &= \int_0^1 -f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 \\ &= (-\frac{1}{3} + 1) - 0 + (\frac{8}{3} - 2) - (\frac{1}{3} - 1) = 2\end{aligned}$$

50. a) $\int f(x)\,dx = 2x^2 + 3x + C$

$\int g(x)\,dx = x^3 - x^2 + 5x + C$

b) $\int f(x)\,dx = -x^{-2} + 3\,x^{-1} + \ln|x| + C$

$\int g(x)\,dx = -\frac{3}{x} - 2\ln|x| + x + C$

c) Wegen $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ist $\int f(x)\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Wegen $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ ist $\int g(x)\,dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + C$

51. a) Es ist

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int 20\,x\,(x+1)^3\,dx \qquad [u(x)=20x \text{ und } v'(x)=(x+1)^3].\\
&= 20x\cdot\frac{(x+1)^4}{4}-\int 20\cdot\frac{(x+1)^4}{4}\,dx\\
&= 5x(x+1)^4-5\int(x+1)^4\,dx\\
&= 5x(x+1)^4-5\cdot\frac{(x+1)^5}{5}+C\\
&= (4x-1)(x+1)^4+C
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,dx &= \int 15\,x\,\sqrt{x+1}\,dx \qquad [u(x)=15x \text{ und } v'(x)=\sqrt{x+1}]\\
&= 15x\cdot\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\int 15\cdot\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\,dx\\
&= 10x(x+1)^{\frac{3}{2}}-10\int(x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx\\
&= 10x(x+1)^{\frac{3}{2}}-10\cdot\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C\\
&= (6x-4)\,\sqrt{x+1}^{\,3}+C
\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int(x^2+1)\,e^x\,dx \qquad [u(x)=x^2+1 \text{ und } v'(x)=e^x]\\
&= (x^2+1)\cdot e^x-\int 2x\cdot e^x\,dx \qquad [u(x)=2x \text{ und } v'(x)=e^x]\\
&= (x^2+1)\cdot e^x-(2x\cdot e^x-\int 2\cdot e^x\,dx)\\
&= (x^2-2x+3)\,e^x+C
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,dx &= \int(\ln x)^2\,dx \qquad [u(x)=(\ln x)^2 \text{ und } v'(x)=1]\\
&= x\cdot(\ln x)^2-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\
&= x\cdot(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx\\
&= x\cdot(\ln x)^2-2\,x\,\ln x+2\,x+C
\end{aligned}$$

52. a) Es ist

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int 4\,(4x+1)^3\,dx \qquad [u = 4x+1 \text{ mit } du = 4\,dx]\\ &= \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4}\,(4x+1)^4 + C\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int (2x+3)^5\,dx \qquad [u = 2x+3 \text{ mit } du = 2\,dx]\\ &= \int \frac{1}{2} u^5\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{12}\,(2x+3)^6 + C\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \qquad [u = x^2+1 \text{ mit } du = 2x\,dx]\\ &= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C\end{aligned}$$

und wegen $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} = \dfrac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}$ schließlich

$$\int g(x)\,dx = \int x - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

53. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x + 5 = 3\,(x-1)^2 + 2 > 0;$$

damit ist f streng monoton steigend. Wegen $f(x_0) = f(1) = 0$ ist x_0 eine Nullstelle von f. Insbesondere verläuft G_f auf $]-\infty, 1[$ unterhalb und auf $]1, \infty[$ oberhalb der x–Achse.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f''(x) = 6\,x - 6$$

und

$$f'''(x) = 6;$$

Wegen $f''(x) = 0 \iff 6\,x = 6 \iff x = 1$ mit $f'''(1) = 6 \neq 0$ besitzt f genau einen Wendepunkt, nämlich $W(1;0)$. Für die Wendetangente t gilt

$$t(x) = f'(1)\cdot(x-1) + f(1) = 2\,(x-1) = 2\,x - 2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Es ist

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{4}\,x^4 - x^3 + \tfrac{5}{2}\,x^2 - 3\,x\right]_0^2 =$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 2^4 - 2^3 + \tfrac{5}{2}\cdot 2^2 - 3\cdot 2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 0^3 + \tfrac{5}{2}\cdot 0^2 - 3\cdot 0\right) = 0$$

Das vom Graphen G_f und der x–Achse zwischen $a = 0$ und $b = 2$ eingeschlossene Flächenstück zerfällt in die unterhalb der x–Achse liegende Teilfläche zwischen $a = 0$ und der Nullstelle $x_0 = 1$ mit dem Inhalt A_1 und die oberhalb der x–Achse liegende Teilfläche zwischen der Nullstelle $x_0 = 1$ und $b = 2$ mit dem Inhalt A_2. Wegen

$$\int_0^2 f(x)\,dx = -|A_1| + |A_2| = 0$$

ist $|A_1| = |A_2|$; die beiden betrachteten Teilflächen sind also flächengleich.

54. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = 0 \iff e^{-x} = e^{-2x} \iff -x = -2\,x \iff x = 0;$$

daher besitzt f die Nullstelle $x_0 = 0$. Ferner gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-x} - e^{-2x}\right) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} - \lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0.$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = e^{-x}\cdot(-1) - e^{-2x}\cdot(-2) = -e^{-x} + 2\,e^{-2x} = e^{-2x}(2 - e^{x}).$$

Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x < \ln 2$ ist f auf $]-\infty, \ln 2]$ streng monoton wachsend, und wegen $f'(x) < 0$ für alle $x > \ln 2$ ist f auf $[\ln 2, \infty[$ streng monoton fallend. Damit besitzt f in $x = \ln 2$ das (isolierte) Maximum $(\ln 2, \frac{1}{4})$.

c) Es ist

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \left(e^{-x} - e^{-2x}\right)dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^{-2x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\left(-e^{-b} + \frac{1}{2}\,e^{-2b}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Die (sich ins Unendliche erstreckende) von Graphen G_f und der x–Achse im 1. Quadranten eingeschlossene Fläche besitzt den Inhalt $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

55. a) Für alle $x \in\,]0, \infty[$ gilt

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2}\ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1;$$

damit besitzt f genau eine Nullstelle, nämlich $x_0 = 1$.

Wegen $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ ist

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} \ln x = -\infty;$$

des weiteren folgt mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2\,x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\,x^2} = 0.$$

b) Für alle $x \in]0, \infty[$ gilt nach der Produktregel

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot \ln x + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}\,(1 - 2\,\ln x);$$

dabei gilt

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{x^3}\,(1 - 2\,\ln x) = 0 \iff$$
$$\iff 1 - 2\,\ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{e}.$$

Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0, \sqrt{e}[$ ist f auf $]0, \sqrt{e}]$ streng monoton steigend, und wegen $f'(x) < 0$ für alle $x \in]\sqrt{e}, \infty[$ ist f auf $[\sqrt{e}, \infty[$ streng monoton fallend. Insbesondere besitzt f in $x_1 = \sqrt{e}$ ein Maximum $H = (\sqrt{e}, \frac{1}{2\,e})$.

c) Durch partielle Integration mit $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ (also $u(x) = -\frac{1}{x}$) und $v(x) = \ln x$ (also $v'(x) = \frac{1}{x}$) erhält man

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,\ln x\,dx = -\frac{1}{x}\,\ln x - \int (-\frac{1}{x})\,\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{x}\,\ln x + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\,\ln x - \frac{1}{x} + c = -\frac{1}{x}\,(1 + \ln x) + c$$

Damit ergibt sich

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\,(1 + \ln x)\right]_1^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1 + \ln b}{b} - (-1)\right] = 1 - \lim_{b\to\infty} \frac{1 + \ln b}{b} = 1 - \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{1}{b}}{1} = 1$$

Das (sich ins Unendliche erstreckende) vom Graphen G_f und der x-Achse im 1. Quadranten eingeschlossene Fläche besitzt den (endlichen) Inhalt $\int_1^\infty f(x)\,dx = 1$.

56. a) Es ist

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{m}{x_{\max}} \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^{m-1} dx = \frac{m}{x_{\max}^m} \int x^{m-1}\,dx =$$
$$= \frac{m}{x_{\max}^m} \cdot \frac{x^m}{m} + c = \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^m + c$$

und damit beträgt der Anteil des Pulvers mit einem Korndurchmesser zwischen $\frac{1}{2}x_{\max}$ und $x_{\max}$ genau

$$\int_{\frac{1}{2}x_{\max}}^{x_{\max}} f(x)\,dx = \left[\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^m\right]_{\frac{1}{2}x_{\max}}^{x_{\max}} = \left(\frac{x_{\max}}{x_{\max}}\right)^m - \left(\frac{\frac{1}{2}\,x_{\max}}{x_{\max}}\right)^m = 1 - \frac{1}{2^m}$$

b) Der Anteil des Pulvers mit einem Korndurchmesser von genau x_0 beträgt

$$\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$$

c) Es ist

$$\int_0^{x_{\max}} f(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^{x_{\max}} f(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\left[\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^m\right]_a^{x_{\max}} =$$
$$= \lim_{a\to 0}\left(\left(\frac{x_{\max}}{x_{\max}}\right)^m - \left(\frac{a}{x_{\max}}\right)^m\right) = \lim_{a\to 0}\left(1 - \left(\frac{a}{x_{\max}}\right)^m\right) = 1$$

57. Alle auftretenden Integrale sind im wesentlichen von der Form $\int_0^\infty e^{-k\,t}\,dt$ mit einem Parameter $k > 0$. Wegen

$$\int e^{-k\,t}\,dt = -\frac{1}{k}\,e^{-k\,t} + C$$

erhält man

$$\int_0^\infty e^{-k\,t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-k\,t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{k}\,e^{-k\,t}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{k}\,e^{-k\,b} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

a) Die absolute Bioverfügbarkeit bei der intravenösen Arzneistoffinjektion beträgt

$$\int_0^\infty C(t)\,dt = \int_0^\infty C_0 \cdot e^{-k_e\,t}\,dt = C_0 \cdot \int_0^\infty e^{-k_e\,t}\,dt = \frac{C_0}{k_e}$$

b) Die absolute Bioverfügbarkeit bei der peroralen Applikation beträgt

$$\int_0^\infty C(t)\,dt = \int_0^\infty C_0 \cdot \frac{k_a}{k_a - k_e} \cdot \left(e^{-k_e\,t} - e^{-k_a\,t}\right)\,dt =$$
$$= C_0 \cdot \frac{k_a}{k_a - k_e} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-k_e\,t}\,dt - \int_0^\infty e^{-k_a\,t}\,dt\right) =$$
$$= C_0 \cdot \frac{k_a}{k_a - k_e} \cdot \left(\frac{1}{k_e} - \frac{1}{k_a}\right) = C_0 \cdot \frac{k_a}{k_a - k_e} \cdot \frac{k_a - k_e}{k_e\,k_a} = \frac{C_0}{k_e}$$

c) Die absolute Bioverfügbarkeit bei der intravenösen und der peroralen Arzneistoffapplikation stimmen überein; insbesondere hängt letztere nicht von der Geschwindigkeit der Anflutung des Arzneistoffes in das Blut ab.