Collapsingfunktionen

W. Buchholz

Def $\varphi_0(b) := \omega^b$

$\varphi_a :=$ Ord.funktion der Klasse $\{b \in On \mid \forall x < a\ \varphi_x(b) = b\}$, falls $a > 0$.

$$\bar\varphi ab := \begin{cases} \varphi_a(b+1) & , \text{ wenn } b = b_0 + n \text{ mit } \varphi_a(b_0) = b_0 \text{ oder } \varphi_a(b_0) = a \\ \varphi_a(b) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

a heißt <u>starkkritisch</u> $:\Longleftrightarrow \quad a = \varphi_a(0)$

$\Gamma := \{a \in On \mid a$ ist starkkritisch$\}$

$$c =_{NF} c_1 + \dots + c_n \quad :\Longleftrightarrow \begin{cases} n \geq 1 \text{ und } c_1 \geq \dots \geq c_n \text{ sind add. Hauptzahlen} \\ \text{mit } c = c_1 + \dots + c_n \end{cases}$$

Zu jeder add. Hauptzahl $c \notin \Gamma$ gibt es eindeutig $a, b \in On$ mit $c = \bar\varphi ab$. Für alle $a, b \in On$ ist $\bar\varphi ab \notin \Gamma$.

<u>Def. von $Pc \subseteq \Gamma$ für jedes $c \in On$</u>

1. $P0 := \emptyset$
2. $Pc := \bigcup_{i=1}^{n} Pc_i$, falls $c =_{NF} c_1 + \dots + c_n$ $(n \geq 2)$.
3. $P\bar\varphi ab := Pa \cup Pb$
4. $Pc := \{c\}$, falls $c \in \Gamma$.

<u>Def von $M < a$ und $a \leq M$</u>

Ist $M \subseteq On$, so sei

$M < a :\Longleftrightarrow \forall x \in M (x < a)$

$a \leq M :\Longleftrightarrow \exists x \in M (a \leq x)$

<u>Lemma 1</u>

a) $a \notin \Gamma \Rightarrow Pa < a$;

b) $c \in \Gamma \Rightarrow (Pa < c \Leftrightarrow a < c)$

c) $Pb \subseteq P(a+b) \subseteq Pa \cup Pb$

d) $Sa = \max\{Sx \mid x \in Pa\}$

Def | Sa ist die eindeutig bestimmte Zahl x mit $\Omega_x \leq a < \Omega_{x+1}$, wobei $\Omega_0 := 0$, $\Omega_x := \aleph_x$ für $x \neq 0$.

Im folgenden sei $\tau \neq 0$ eine feste Zahl $< \Omega_1$.
$u, v, w,$ bezeichnen Zahlen $\leq \tau$.

<u>Induktive Def. von Ordinalzahlmengen $C_v(a)$</u>

(C1) $\Omega_v \subseteq C_v(a)$

(C2) $c \notin \Gamma$ und $Pc \subseteq C_v(a) \Rightarrow c \in C_v(a)$

(C3) $x < a$, $x \in C_v(a)$, $v \leq u$, $x \in C_u(x) \Rightarrow [x, u] \in C_v(a)$

Dabei sei $[a, v] := \min\{z \mid z \notin C_v(a)\}$

<u>Lemma 2</u>

<u>Bemerkung</u> Aus L.2 a) folgt $C_v(a) \subseteq \Omega_\tau$.

a) $\Omega_v \leq [a, v] < \Omega_{v+1}$

b) $[a, v] \in \Gamma$

c) $a < b \Rightarrow C_v(a) \subseteq C_v(b)$ und $[a, v] \leq [b, v]$

d) $a < b$ und $a \in C_v(a) \Rightarrow [a, v] < [b, v]$

e) $a_i \in C_v(a_i)$ $(i = 1, 2)$ und $[a_1, v_1] = [a_2, v_2] \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge v_1 = v_2$

Beweis:

a), c) klar. e) folgt aus a) + d)

b) <u>Ann:</u> $[a, v] \notin \Gamma$. Dann $P[a, v] < [a, v]$ und folglich $P[a, v] \subseteq C_v(a)$, woraus $[a, v] \in C_v(a)$ folgt. ↯

d) Aus $a < b \wedge a \in C_v(a)$ folgt $a < b \wedge a \in C_v(b) \wedge a \in C_v(a)$ und daraus nach (C3) $[a, v] \in C_v(b)$, also $[a, v] \neq [b, v]$. Wegen $a < b$, ist $[a, v] \leq [b, v]$.

<u>Lemma 3</u>

a) $c \in C_v(a) \Leftrightarrow Pc \subseteq C_v(a)$,

b) $[x, u] \in C_v(a) \Leftrightarrow x < a \wedge x \in C_v(a)$, falls $v \leq u$ und $x \in C_u(x)$.

Beweis: „$\Leftarrow$" ist klar.
„$\Rightarrow$" a) (C1) Ist $c \in \Omega_\rho$, so auch $Pc \subseteq \Omega_\rho$.
(C2) trivial.
(C3) Ist $c = [x,u]$, so nach L2b) $Pc = \{c\}$.
b) Wegen $v \leq u$ und L.2a),b) kann $[x,u] \in C_v(a)$ nur nach (C3) gelten. Also ist $[x,u] = [x_1, u_1]$ mit $x_1 < a \wedge x_1 \in C_v(a) \wedge x_1 \in C_{u_1}(x_1)$. Mit $x \in C_u(x)$ und L.2e) folgt daraus $x < a \wedge x \in C_v(a)$.

Lemma 4

$[a,v] = C_v(a) \cap \Omega_{v+1}$.

Beweis:
„$\subseteq$" gilt nach Def. von $[a,v]$ und L.2a).
„$\supseteq$" (C1) Ist $c < \Omega_v$, so $c < [a,v]$ nach L.2a).
(C2) Ist $c < \Omega_{v+1}$ und $Pc \subseteq C_v(a)$, so nach L.1a auch $Pc \subseteq C_v(a) \cap \Omega_{v+1}$ und deshalb nach I.V. $Pc < [a,v]$. Mit L.1b + L.2b folgt $c < [a,v]$.
(C3) Sei $c = [x,u] < \Omega_{v+1}$ mit $x < a \wedge x \in C_v(a) \wedge v \leq u \wedge x \in C_u(x)$. Wegen $\Omega_u \leq [x,u] < \Omega_{v+1}$ und $v \leq u$ ist dann $v = u$ und somit $x < a \wedge x \in C_v(x)$ woraus mit L.2d) $c = [x,v] < [a,v]$ folgt.

Ind. Def. einer Ordinalzahlenmenge T

(T1) $c \notin \Gamma$ und $Pc \subseteq T \Rightarrow c \in T$

(T2) $a \in T$ und $a \in C_u(a) \Rightarrow [a,u] \in T$

Im folgenden bezeichnen a, b, c, d, x, y, z stets Elemente von T. Die Schreibweise $[a,u] \in T$, soll stets $a \in C_u(a)$ beinhalten!

Folgerungen

1. $T = C_0(\Omega_\tau) \subseteq \Omega_\tau$
2. $\Omega_u \in T$ für alle $u < \tau$
3. $[a,u] \in T$ und $[b,u] \in T \Rightarrow (a < b \Leftrightarrow [a,u] < [b,u])$.

Def. von $K_v^+ a$ und $k_v^+ a$

1. $K_v^+ a := K_v^+ Pa := \bigcup_{x \in Pa} K_v^+ x$, falls $a \notin \Gamma$

2. $K_v^+ [x,u] := \begin{cases} \emptyset & \text{, wenn } u < v \\ \{x\} \cup K_v^+ x & \text{, " } v \leq u \end{cases}$

$k_v^+ a := \max(\{0\} \cup K_v^+ a)$

Folg $a < \Omega_v \Rightarrow K_v^+ a = \emptyset$.
$x \in K_v^+ a \Rightarrow x$ kürzer als a.

Lemma 5

$c \in C_v(a) \Leftrightarrow K_v^+ c < a$

Beweis

(T1) $c \notin \Gamma$: $c \in C_v(a) \underset{L.3}{\Leftrightarrow} Pc \subseteq C_v(a) \underset{I.V.}{\Leftrightarrow} \forall x \in Pc (K_v^+ x < a) \Leftrightarrow K_v^+ c < a$.

(T2) $c = [x,u]$: (i) $u < v$: $c \in \Omega_v \subseteq C_v(a)$ und $K_v c = \emptyset < a$.

(ii) $v \leq u$: $c \in C_v(a) \underset{L.3b}{\Leftrightarrow} x < a \wedge x \in C_v(a) \underset{I.V.}{\Leftrightarrow} \{x\} \cup K_v^+ x < a$.

Lemma 6

a) $u \leq v \Rightarrow K_v^+ a \subseteq K_u^+ a$ und $k_v^+ a \leq k_u^+ a$

b) $u \leq v \Rightarrow K_u^+ k_v^+ a \subseteq K_u^+ a$

c) $K_u^+ k_u^+ a < k_u^+ a$, d.h. $[k_u^+ a, u] \in T$

$\boxed{\text{Beweis}}$

a) Sei $a = [x,w]$. Ist $w < v$, so $K_v^+ a = \emptyset \subseteq K_u^+ a$. Ist $v \leq w$, so auch $u \leq w$ und deshalb $K_v a = \{x\} \cup K_v^+ x \underset{I.V.}{\subseteq} \{x\} \cup K_u^+ x = K_u^+ a$.

b) Sei $k_v^+ a =: z \neq 0$. Dann $z \in K_v^+ a$. Induktion nach $a \in T$:
Ist $a \notin \Gamma$, so $z \in K_v^+ x$ für ein $x \in Pa$, und somit $K_u^+ z \underset{I.V.}{\subseteq} K_u^+ x \subseteq K_u^+ a$.
Ist $a = [x,w]$, so $u \leq v \leq w$, also $z \in \{x\} \cup K_v^+ x$ und somit
$K_u^+ z \underset{I.V.}{\subseteq} K_u^+ x \subseteq K_u^+ a$.

c) Sei $z := k_u^+ a$. Nach b) gilt $K_u^+ z \subseteq K_u^+ a$, also $\forall x \in K_u^+ z (x \leq z)$. Offenbar gilt aber $z \notin K_u^+ z$, also $K_u^+ z < z$.

Lemma 7

a) $Sa = u \wedge K_u^+ a \neq \emptyset \Rightarrow [k_u^+ a, u] \leq a$.

b) $\Omega_u \leq a < b < \Omega_{u+1} \Rightarrow k_u^+ a \leq k_u^+ b$.

Beweis von Lemma 7:

a) Wäre $a < [k_u^+ a, u]$, so $a \in C_u(k_u^+ a)$ und somit $K_u^+ a < k_u^+ a$, was nur für $K_u^+ a = \emptyset$ möglich ist.

b) Wäre $k_u^+ b < k_u^+ a$, so nach L.5+L.7a) $b \in C_u(k_u^+ a) \cap \Omega_{u+1} \overset{L4}{=} [k_u^+ a, u] \leq a$.

<u>Def. von Ya</u>

1. $Ya := YPa := \bigcup_{x \in Pa} Yx$, falls $a \notin \Gamma$

2. $Y[x,u] := \{u\} \cup \{\sigma \in Yx \mid \sigma \leq u\}$

<u>Def</u> $u_a^+ := \min\{\sigma \in Ya \cup \{\tau\} \mid \sigma > u\}$

<u>Lemma 8</u>

a) $Sa \leq u \Rightarrow u_a^+ = \tau$

b) $u < Sa \Rightarrow u < u_a^+ \leq Sa$

c) $u < v_1, v_2 \leq u_a^+ \Rightarrow K_{v_1}^+ a = K_{v_2}^+ a$

Beweis:

a) Offenbar gilt $\forall \sigma \in Ya (\sigma \leq Sa)$, also $u_a^+ = \tau$, falls $Sa \leq u$.

b) Sei $u < Sa$. Dann gilt offenbar $Sa \in \{\sigma \in Ya \mid \sigma > u\}$, also $u < u_a^+ \leq Sa$.

c) Induktion nach $a \in T$:

1. $a \notin \Gamma$: $K_{v_i}^+ a = \bigcup_{x \in Pa} K_{v_i}^+ x$. Für $x \in Pa$ ist $Yx \subseteq Ya$, also $u_a^+ \leq u_x^+$ und somit nach I.V. $K_{v_1}^+ x = K_{v_2}^+ x$,

2. $a = [x, w]$: Ist $w \leq u$, so $K_{v_1}^+ a = \emptyset = K_{v_2}^+ a$. – Sei also $u < w = Sa$. Dann ist $v_1, v_2 \leq u_a^+ \overset{\text{nach b)}}{\leq} w$ und somit $K_{v_i}^+ a = \{x\} \cup K_{v_i}^+ x$; Wegen $\{\sigma \in Yx \mid \sigma \leq w\} \subseteq Ya$ und $u_a^+ \leq w$ gilt $u_a^+ \leq u_x^+$ und somit nach I.V. $K_{v_1}^+ x = K_{v_2}^+ x$.

Def. von $h_u\alpha$

$$h_u\alpha := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } \alpha<\Omega_u \\ k_u^+\alpha+\bar\omega^\alpha, & \text{"} \quad \Omega_u\le\alpha<\Omega_{u+2} \\ k_u^+\alpha+[h_v\alpha,u+1], & \text{"} \quad \Omega_{u+2}\le\alpha \wedge v=u_\alpha^+ \wedge h_v\alpha\le k_u^+\alpha \\ h_v\alpha, & \text{"} \quad \Omega_{u+2}\le\alpha\wedge v=u^+_\alpha \wedge k_u^+\alpha<h_v\alpha\end{cases}$$

Bemerkung

Nach L. 9d gilt für $\alpha\ge\Omega_{u+2}$:

$$h_u\alpha = \begin{cases} k_u^+\alpha+[h_{u+1}\alpha,u+1], & \text{falls } h_{u+1}\alpha\le k_u^+\alpha \\ h_{u+1}\alpha, & \text{sonst}\end{cases}$$

Lemma 9

a) $w\le u \Rightarrow k_w^+h_u\alpha = k_w^+\alpha$

b) $k_u^+\alpha < h_u\alpha$, falls $\alpha\ne 0$

c) $\alpha\le h_u\alpha$

d) $u<S\alpha \wedge u<w\le v:=u^+_\alpha \Rightarrow h_w\alpha = h_v\alpha$

e) $h_{u+1}\alpha\le h_u\alpha$. (Beweis siehe Seite 9)

Beweis:

a)–c) α-Induktion:

1. $\alpha<\Omega_u$: $h_u\alpha=\alpha$ und $k_u^+\alpha=0$.

2. $\Omega_u\le\alpha<\Omega_{u+2}$: a) $K_w^+\alpha = K_w^+\bar\omega^\alpha \subseteq K_w^+h_u\alpha \subseteq K_w^+k_u^+\alpha\cup K_w^+\bar\omega^\alpha \overset{L.6b}{=} K_w^+\alpha$.

b), c) $k_u^+\alpha\le k_u^+\alpha+\bar\omega^\alpha = h_u\alpha$, $\alpha<\bar\omega^\alpha\le h_u\alpha$.

3. $\Omega_{u+2}\le\alpha\wedge v=u^+_\alpha\wedge h_v\alpha\le k_u^+\alpha$:

Nach L. 8c) + I.V. a) b) gilt: $k_{u+1}^+h_v\alpha = k_{u+1}^+\alpha = k_v^+\alpha < h_v\alpha$;
folglich ist $[h_v\alpha, u+1]\in T$.

a) Mit L. 6a) folgt $h_v\alpha\le k_u^+\alpha\le k_w^+\alpha$. Nach I.V. ist $k_w^+h_v\alpha = k_w^+\alpha$.
Folglich gilt $k_w^+[h_v\alpha,u+1] = k_w^+\alpha$. Nach L. 6b) ist $K_w^+k_u^+\alpha\subseteq K_w^+\alpha$.
Es folgt $k_w^+h_u\alpha = k_w^+(k_u^+\alpha+[h_v\alpha,u+1]) = k_w^+\alpha$.

b), c) Nach I.V. c) und nach Def. gilt $\alpha\le h_v\alpha\le k_u^+\alpha<h_u\alpha$.

4. $\Omega_{u+2}\le\alpha\wedge v=u^+_\alpha\wedge k_u^+\alpha<h_v\alpha$: Dann ist $h_u\alpha=h_v\alpha$ und die Beh. a), c) folgen unmittelbar aus I.V., während b) trivial ist.

d) Sei $u < w < v = u^+_a$. Dann ist $v = w^+_a$ und nach L. 8c $k^+_w a = k^+_v a$.

1. $a < l_{w+2}$. Dann ist $\Omega_w \le a < \Omega_{w+2}$ und $\Omega_v \le a < \Omega_{v+2}$, also $h_w a = k^+_w a + \bar{\omega}^a = k^+_v a + \bar{\omega}^a = h_v a$.

2. $l_{w+2} \le a$. Nach L. 9b ist $k^+_v a < h_v a$, also $v = w^+_a \wedge k^+_w a \le h_v a$ und deshalb $h_w a = h_v a$ nach Def. von $h_w a$.

Def

$$r(a) := \begin{cases} 0, & \text{falls } a = 0 \\ a_n, & \text{''} \quad a =_{NF} a_1 + \dots + a_n. \end{cases}$$

Lemma 10

a) $a < c$ und $b < r(c) \Rightarrow a + b < \cancel{r(c)}$ $<$

b) $\Omega_{u+1} \le a \Rightarrow \Omega_{u+1} < r(h_u a)$

Beweis:

a) $c =_{NF} c_1 + \dots + c_n$ $(n \ge 1)$. Ist $a < \underbrace{c_1 + \dots + c_{n-1}}_{=: c^*}$, so $a + b \le c^* + b < c^* + c_n = c$.
Andernfalls ist $a = c^* + a_0$ mit $a_0 < c_n$. Aus $a_0, b < c_n$ folgt $a_0 + b < c_n$ und damit $a + b = c^* + a_0 + b < c^* + c_n = c$.

b) Durch Y-Induktion zeigen wir für $i \in \{0, 1\}$: $\Omega_{u+i} \le a \Rightarrow \Omega_{u+i} < r(h_u a)$.

1. $\Omega_{u+i} \le a < \Omega_{u+2}$: $r(h_u a) = \bar{\omega}^a > a \ge \Omega_{u+i}$

2. $\Omega_{u+2} \le a \wedge v = u^+_a \wedge h_v a \le k^+_u a$: $r(h_u a) = [h_v a, u+1] > l_{u+1} = [0, u+1]$.

3. $\Omega_{u+2} \le a \wedge v = u^+_a \wedge k^+_u a < h_v a$: Dann $h_u a = h_v a$ und $\Omega_{u+1} \le \Omega_v \le a$.
Mit I.V. folgt $\Omega_{u+1} \le \Omega_v < r(h_v a) = r(h_u a)$.

Lemma 11

a) $a < b < \Omega_{u+1} \Rightarrow h_u a < h_u b$

b) $h_{u+1} a < h_{u+1} b \wedge K^+_u a < h_u b \Rightarrow h_u a < h_u b$.

Beweis von Lemma 11:

a) 1. $a<\Omega_n$: $h_n a = a < b \le h_n b$

2. $\Omega_n \le a < b < \Omega_{n+1}$: Nach L. 7b) ist dann $k_n^+ a \le k_n^+ b$, also $h_n a = k_n^+ a + \bar\omega^a < k_n^+ b + \bar\omega^b = h_n b$.

b) 1. $a, b < \Omega_n$: $a = h_{n+1} a < h_{n+1} b = b \Rightarrow h_n a = a < b = h_n b$.

2. $a < \Omega_n \le b$: $h_n a = a < b \le h_n b$. 2.' $b < \Omega_n \le a$: $h_{n+1} b = b < a \le h_{n+1} a$ ↯.

3. $\Omega_n \le a, b < \Omega_{n+2}$: Aus $h_{n+1} a < h_{n+1} b$ folgt mit a) $a < b$, also $\bar\omega^a < \bar\omega^b$. Aus $k_n^+ a < h_n b = k_n^+ b + \bar\omega^b$ und $\bar\omega^a < \bar\omega^b$ folgt $h_n a = k_n^+ a + \bar\omega^a < h_n b$.

4. $\Omega_{n+2} \le b$:

4.1. $h_{n+1} b \le k_n^+ b \wedge h_n b = k_n^+ b + [h_{n+1} b, n+1]$:

4.1.1. $\Omega_n \le a < \Omega_{n+2} \wedge h_n a = k_n^+ a + \bar\omega^a$: Aus $K_{n+1}^+ a < h_{n+1} a < h_{n+1} b$ und $a < \Omega_{n+2}$ folgt $a \in C_{n+1}(h_{n+1} b) \cap \Omega_{n+2} = [h_{n+1} b, n+1]$, also auch $\bar\omega^a < [h_{n+1} b, n+1]$. Mit $k_n^+ a < h_n b$ folgt daraus $k_n^+ a + \bar\omega^a < h_n b$.

4.1.2. $\Omega_{n+2} \le a \wedge h_{n+1} a \le k_n^+ a$: In diesem Fall ist $h_n a = k_n^+ a + [h_{n+1} a, n+1]$: Aus $h_{n+1} a < h_{n+1} b$ folgt $[h_{n+1} a, n+1] < [h_{n+1} b, n+1]$ und mit $k_n^+ a < h_n b$ weiter $h_n a < h_n b$.

4.1.3. $\Omega_{n+2} \le a \wedge k_n^+ a < h_{n+1} a$:
Dann gilt $h_n a = h_{n+1} a < h_{n+1} b \le k_n^+ b < h_n b$.

4.2. $k_n^+ b < h_{n+1} b \wedge h_n b = h_{n+1} b$:

4.2.1. $\Omega_n \le a \wedge h_n a = k_n^+ a + c$ mit $c < \Omega_{n+2}$:
Nach L. 10 b) ist $\Omega_{n+2} < r(h_{n+1} b) = r(h_n b)$. Mit $k_n^+ a < h_n b$ und $c < \Omega_{n+2}$ folgt daraus nach L. 10a) $k_n^+ a + c < h_n b$.

4.2.2. $\Omega_{n+2} \le a \wedge h_n a = h_{n+1} a$: $h_n a = h_{n+1} a < h_{n+1} b = h_n b$.

5. $b < \Omega_{n+2} \le a$: Ist $b < \Omega_{n+1}$, so $h_{n+1} b = b < a \le h_{n+1} a$ ↯.
Also gilt: $\Omega_{n+1} \le b < \Omega_{n+2} \le a$ und $h_n b = k_n^+ b + \bar\omega^b$ und $h_{n+1} a < h_{n+1} b = k_{n+1}^+ b + \bar\omega^b$. Da nach L. 10b) $\Omega_{n+2} < r(h_{n+1} a)$ gilt, folgt aus $h_{n+1} a < k_{n+1}^+ b + \bar\omega^b \wedge \bar\omega^b < \Omega_{n+2}$ mit L. 10a) $h_{n+1} a \le k_{n+1}^+ b$.

5.1. $h_u a = k_u^+ a + [h_{u+1} a, u+1]$:

Aus $h_{u+1} a \le k_{u+1}^+ b$ folgt $b \notin C_{u+1}(h_{u+1} a)$, also $[h_{u+1} a, u+1] < b < \bar\omega^b$.

Mit $k_u^+ a < h_u b = k_u^+ b + \bar\omega^b$ folgt daraus $h_u a < h_u b$.

5.2. $h_u a = h_{u+1} a$: $\quad h_{u+1} a \le k_{u+1}^+ b \le k_u^+ b < h_u b$.

Lemma 12

$u \le v \Longrightarrow h_u a < h_u [h_v a, v]$

Beweis durch Ind. nach $|\{\sigma \in Ya \cup Yb \mid u < \sigma\}|$, wobei $b := [h_v a, v]$.

1. $u = v$: $h_u a = h_v a \le k_u^+ b < h_u b$.
2. $u < v$: Dann ist $u < w := \min\{u_a^+, u_b^+\} \le v$ und mit I.V. + L.9d folgt $h_{u+1} a = h_w a < h_w b = h_{u+1} b$. Nach L. 9a,b gilt $k_u^+ a = k_u^+ h_v a \le k_u^+ b < h_u b$. Mit L.11b) folgt $h_u a < h_u b$.

Beweis von L.9e:

1. $a < \Omega_{u+1}$: $h_{u+1} a = a \le h_u a$.
2. $\Omega_{u+1} \le a < \Omega_{u+2}$: $h_{u+1} a = k_{u+1}^+ a + \bar\omega^a \le k_u^+ a + \bar\omega^a = h_u a$
3. $\Omega_{u+2} \le a \wedge h_{u+1} a \le k_u^+ a$: $h_{u+1} a \le k_u^+ a < h_u a$.
4. $\Omega_{u+2} \le a \wedge k_u^+ a < h_{u+1} a$: $h_{u+1} a = h_u a$.

Definition von $K_v a$

1. $K_v a := K_v Pa := \bigcup_{x \in Pa} K_v x$, falls $a \notin \Gamma$

2. $K_v [x,u] := \begin{cases} \{[x,u]\}, & \text{falls } u \le v \\ K_v x, & \text{"} \ v < u \end{cases}$

Lemma 13

a) $K_v(a \# b) = K_v a \cup K_v b$, $\quad K_v b \subseteq K_v(a+b) \subseteq K_v a \cup K_v b$

b) $K_v \varphi ab = K_v a \cup K_v b$

c) $K_v a = Pa$, falls $Sa \le v$.

Beweis klar.

Lemma 14

a) $K_u^+ a < h_u b \Rightarrow K_u a < [h_u b, u]$

b) $K_{u+1}^+ a < h_{u+1} b$ und $K_u a < [h_u b, u] \Rightarrow K_u^+ a < h_u b$

Beweis durch Ind. nach $a \in T$;

1, $a \notin \Gamma$: In diesem Fall folgt die Beh. unmittelbar aus der I.V.

2. $a = [x, v] \wedge v < u$: Dann ist $K_u a = \{a\} < \Omega_u \leq [h_u b, u]$ und $K_u^+ a = \emptyset$.

3. $a = [x, u]$: Es ist $K_u^+ a = \{x\} \cup K_u^+ x$, $K_u a = \{[x, u]\}$ und $K_u^+ x < x$,

a) $x \in K_u^+ a < h_u b \Rightarrow [x, u] < [h_u b, u]$

b) $[x, u] < [h_u b, u] \Rightarrow x < h_u b \Rightarrow K_u^+ a < h_u b$.

4. $a = [x, v] \wedge u < v$: a) $K_u^+ x \subseteq K_u^+ a < h_u b \underset{I.V.}{\Rightarrow} K_u a = K_u x < [h_u b, u]$,

b) $K_{u+1}^+ x \subseteq K_{u+1}^+ a < h_{u+1} b$ und $K_u x \subseteq K_u a < [h_u b, u] \underset{I.V.}{\Rightarrow} K_u^+ x < h_u b$.

$x \in K_{u+1}^+ a < h_{u+1} b$ und $h_{u+1} b \leq h_u b$ (L. 9e) $\Rightarrow K_u^+ a = \{x\} \cup K_u^+ x < h_u b$.

Lemma 15

$w < u \Rightarrow K_w h_u a = K_w a$.

Beweis durch γ-Ind.:

1. $a < \Omega_u$: $h_u a = a$.

2. $\Omega_u \leq a < \Omega_{u+2}$: $h_u a = k_u^+ a + \omega^a$. Mit L. 13 a), b) und dem untenstehenden H.S. folgt: $K_w a \subseteq K_w h_u a \subseteq K_w k_u^+ a \cup K_w a = K_w a$.

3. $\Omega_{u+2} \leq a \wedge h_u a = k_u^+ a + [h_v a, u+1] \wedge v = u_a^+$: Nach I.V. ist $K_w a = K_w h_v a = K_w [h_v a, u+1]$. Mit L. 13 a) und H.S. folgt daraus die Beh.

4. $\Omega_{u+2} \leq a \wedge h_u a = h_v a \wedge v = u_a^+$: Die Beh. folgt aus I.V.

H.S. $w < u \Rightarrow K_w k_u^+ a \leq K_w a$.

Beweis: Sei $z := k_u^+ a$. Ist $z = 0$, so $K_u^+ z = \emptyset$. – Sei jetzt $z \neq 0$, also $z \in K_u^+ a$.

Wir zeigen: $z \in K_u^+ a \Rightarrow K_w z \leq K_w a$ durch Ind. nach $a \in T$.

1. $a \notin \Gamma$: Dann $z \in K_u^+ x$ für ein $x \in Pa$. Also $K_w z \underset{I.V.}{\leq} K_w x \leq K_w a$.

2. $a = [x, v]$ mit $u \leq v$: Dann $z \in \{x\} \cup K_u^+ x$. Mit I.V. folgt daraus $K_w z \leq K_w x \leq K_w a$.

<u>Def</u> $$D_u a := \begin{cases} a & \text{, wenn } Sa \le u \\ [h_u a, u], & \text{„} \quad u < Sa \end{cases}$$

<u>Satz 1</u>

(D1) $u < Sa \Rightarrow D_u a \in \Gamma$ und $K_u a \cup \{\Omega_u\} < D_u a < \Omega_{u+1}$

(D2) $v < u < Sa \Rightarrow K_v D_u a = K_v a$

(D3) $v < u < Sa \Rightarrow D_v a < D_v D_u a$

(D4) $a < b \wedge \forall v (u \le v \le Sa \to K_v a < D_v b) \Rightarrow D_u a < D_u b$

Beweis:

(D1) $D_u a \in \Gamma$ gilt nach L.2b). Aus L.2a) d) +L.9c) folgt $\Omega_u \le [0,u] < D_u a < \Omega_{u+1}$.
Nach L.9b) ist $k_u^+ a < h_u a$, mit L.14a) folgt daraus $K_u a < [h_u a, u] = D_u a$.

(D2) $K_v D_u a = K_v [h_u a, u] = K_v h_u a = K_v a$ L.15

(D3) L.12 $\Rightarrow h_v a < h_v [h_u a, u] = h_v D_u a \Rightarrow D_v a = [h_v a, v] < [h_v D_u a, v] = D_v D_u a$.

(D4) <u>1.</u> $b < \Omega_{u+1}$: $D_u a = a < b = D_u b$.
<u>2.</u> $a < \Omega_u \wedge \Omega_{u+1} \le b$: $D_u a = a < \Omega_u \le [h_u b, u] = D_u b$
<u>3.</u> $Sa = u \wedge \Omega_{u+1} \le b$: $Pa = K_u a < D_u b \in \Gamma \Rightarrow D_u a = a < D_u b$.
<u>4.</u> $\Omega_{u+1} \le a < b$: $D_u a = [h_u a, u]$, $D_u b = [h_u b, u]$;
Nach HS gilt $h_u a < h_u b$, also $D_u a < D_u b$.

<u>HS</u> $a < b \wedge \forall w (u \le w \le Sa \to K_w a < D_w b) \Rightarrow h_u a < h_u b$.

Beweis durch Ind. nach $|\{\sigma \in Ya \cup Yb \mid u < \sigma\}|$:

1. $b < \Omega_{u+1}$: Dann gilt $h_u a < h_u b$ nach L.11a).
2. $\Omega_u \le a \wedge \Omega_{u+1} \le b$: Sei $v := \min\{u_a^+, u_b^+\}$. Dann ist $u < v < \tau$,
und nach I.V. + L.9d) gilt $h_{u+1} a = h_v a < h_v b = h_{u+1} b$,
also nach L.9b auch $K_{u+1}^+ a < h_{u+1} b$. Mit $K_u a < D_u b = [h_u b, u]$
und L.14b) folgt nun $K_u^+ a < h_u b$ und weiter mit L.11b) $h_u a < h_u b$.
3. $a < \Omega_u$: Dann gilt $h_u a = a < b \le h_u b$.

<u>Definition</u> $a \ll_x b \;:\Leftrightarrow\; a < b \wedge \forall v \leq sa\,(K_v a \smallsetminus K_v x < D_v b)$

$a \ll b \;:\Leftrightarrow\; a \ll_0 b$

<u>Bemerkung</u> $a \ll b \Rightarrow a \ll_x b$.

$a \ll_x b \Longrightarrow \forall v\,(K_v a \smallsetminus K_v x < D_v b)$

<u>Satz 2</u>

a) $a \ll_x b \wedge x < D_u b \Rightarrow D_u a < D_u b$

b) $a \ll_x b \wedge x \ll_y b \Rightarrow a \ll_y b$

c) $a_0 \ll_x a \wedge x < D_u a \Rightarrow D_u a_0 \ll_x a$

d) $a \ll_x b \wedge b \ll c \Rightarrow a \ll_x c$

Beweis:

a) Wegen $x < D_u b < \Omega_{u+1}$ gilt $K_v x = Px < D_v b$ für alle $v \geq u$.
Folglich $\forall v \in [u, sa]\,(K_v a < D_v b)$ und deshalb nach (D4) $D_u a < D_u b$

b) $\forall v (K_v a \smallsetminus K_v x < D_v b) \wedge \forall v (K_v x \smallsetminus K_v y < D_v b) \Rightarrow \forall v (K_v a \smallsetminus K_v y < D_v b)$.

c) Sei $\Omega_{u+1} \leq a_0$ (sonst trivial). Es ist $D_u a_0 \leq a_0 < a$.
Nach Voraus. ist $K_v a_0 \smallsetminus K_v x < D_v a$ für alle v
Für $v < u$ gilt $K_v D_u a_0 = K_v a_0$, also $K_v D_u a_0 \smallsetminus K_v x < D_v a$.
Wegen $x < D_u a$ gilt $K_v x < D_v a$ und somit $K_v a_0 < D_v a$
für alle $v \geq u$; mit (D4) folgt $D_u a_0 < D_u a$, also $K_u D_u a_0 < D_u a$.

d) Aus $a \ll_x b \wedge b \ll c$ folgt mit a) $a < c$ und
$\forall v \leq sa (K_v a \smallsetminus K_v x < D_v b < D_v c)$, also $a \ll_x c$.

<u>Satz 3</u>

a) $b \ll a \# b$ (falls $a \neq 0$) und $a, b \ll \bar{\varphi} a b$

b) $b_1 \ll_x b_2 \Rightarrow a \# b_1 \ll_x a \# b_2$ und $\bar{\varphi} a b_1 \ll_x \bar{\varphi} a b_2$

c) $a_1 \ll_x a_2 \wedge b_1 \ll_x \bar{\varphi} a_2 b_2 \Rightarrow \bar{\varphi} a_1 b_1 \ll_x \bar{\varphi} a_2 b_2$

d) $a \ll_x b \wedge x < D_u b \Rightarrow D_u a \ll_x D_u b$.

<u>Beweis von Satz 3</u>

a) folgt aus L.13 und (D1) $(K_v a \cup K_v b = K_v \bar{\varphi} a b < D_v \bar{\varphi} a b)$

b) Aus $b_1 \ll_x b_2$ folgt mit a) + Satz 2a) $(K_v b_1 \setminus K_v x) < D_v b_2 < D_v \bar{\varphi} a b_2$;
mit (D1) folgt außerdem $K_v a \subseteq K_v \bar{\varphi} a b_2 < D_v \bar{\varphi} a b_2$,
also gilt $K_v \bar{\varphi} a b_1 \setminus K_v x = (K_v a \cup K_v b_1) \setminus K_v x < D_v \bar{\varphi} a b_2$.

c) $K_v \bar{\varphi} a_1 b_1 \setminus K_v x \subseteq (K_v a_1 \setminus K_v x) \cup (K_v b_1 \setminus K_v x)$ und
$K_v a_1 \setminus K_v x < D_v a_2 \underset{a)}{<} D_v \bar{\varphi} a_2 b_2$, $K_v b_1 \setminus K_v x < D_v \bar{\varphi} a_2 b_2$.

d) Nach Satz 2a) gilt $D_u a < D_u b$. Mit (D1) folgt $D_v b \leq D_v D_u b$
für $v \leq u$. Bleibt zu zeigen $K_v D_u a \setminus K_v x < D_v b$ für $v \leq u$.
Ist $Sa \leq u$, so $D_u a = a$ und nach Vorauss. $K_v a \setminus K_v x < D_v b$,
Ist $Sa < u$, so $K_u D_u a = \{D_u a\} < D_u b$ und für $v < u$
gilt $K_v D_u a \setminus K_v x = K_v a \setminus K_v x < D_v b$.