Ludwig-Maximilians-Universität München
Fakultät für Physik

Bachelorarbeit

Inwieweit ist eine relativistische Formulierung der Bohmschen Mechanik möglich?

von Aaron Schaal

03.02.2014

Betreuer: Prof. Dr. Detlef Dürr, Prof. Dr. Stefan Hofmann

Ludwig-Maximilians-University Munich

Faculty of Physics

Bachelor Thesis

To What Extent is it Possible to Formulate Bohmian Mechanics Realtivistically?

by Aaron Schaal

03.02.2014

Advisors: Prof. Dr. Detlef Dürr, Prof. Dr. Stefan Hofmann

Inhalt

1. Überblick

Diese Bachelorarbeit orientiert sich an dem Artikel "Can Bohmian mechanics be made relativistic?" von Detlef Dürr, Sheldon Goldstein, Travis Norsen, Ward Struyve und Nino Zanghì [1], in dem die Autoren eine von ihnen weiterentwickelte Version des sogenannten Hypersurface-Bohm-Dirac-Modells sowie einen neuen Ansatz ohne Blätterung (siehe Abschnitt 4.3. bzw. 4.4. der vorliegenden Arbeit) diskutieren. Außerdem wird im oben genannten Artikel erörtert, ob es überhaupt möglich ist, eine Quantentheorie auf fundamentaler Ebene relativistisch zu formulieren. Wie aus meiner Arbeit hervorgehen soll, ist diese Frage prinzipiell unabhängig von der Interpretation bzw. Formulierung der Quantenmechanik. Am deutlichsten treten die konzeptuellen Probleme zwar bei der sogenannten Bohmschen Mechanik ans Licht, was aber meiner Ansicht nach dadurch bedingt ist, dass diese einen eindeutigen Realitätsbezug hat.

In Kapitel 2 werde ich die Grundprinzipien der Bohmschen Mechanik in einigen Sätzen zusammenfassen, wobei ich besonders auf den Aspekt der Nichtlokalität eingehen werde.

Im Anschluss (Kapitel 3) werde ich die für diese Arbeit wesentlichen Aspekte der speziellen Relativitätstheorie ebenfalls kurz darstellen.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf Kapitel 4, in dem ich einen Überblick über Ansätze einer relativistischen Formulierung der Bohmschen Mechanik und deren Hauptschwierigkeiten geben werde. Hierbei werde ich mich auf den Fall freier Teilchen beschränken.

Abschließend werde ich versuchen, auf die im Titel formulierte Fragestellung eine Antwort zu geben, verbunden mit einem Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen der in Kapitel 4 behandelten Modelle.

2. Grundkonzepte der Bohmschen Mechanik

2.1. Realitätsbezug

Die Physik ist eine Bemühung, das Seiende als etwas begrifflich zu erfassen, was unabhängig vom Wahrgenommen-Werden gedacht wird. In diesem Sinne spricht man vom Physikalisch-Realen.

(Einstein in [2],S.80)

Der entscheidende konzeptuelle Unterschied zwischen Bohmscher Mechanik[1] und konventioneller Quantenmechanik[2] besteht darin, dass die Bohmsche Mechanik einen deutlichen ontologischen[3] Bezug besitzt. In der konventionellen Quantenmechanik enthält die Wellenfunktion ψ (bzw. der Zustand $|\psi\rangle$ [3]) die gesamte verfügbare Information über das betrachtete System, sie ist also die komplette Beschreibung. Diese Wellenfunktion entwickelt sich gemäß der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q,t)}{\partial t} = \left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_k} \frac{\partial^2}{\partial q_k^2} + V(q) \right) \psi(q,t), \tag{1}$$

wobei N die Anzahl der Teilchen, m ihre Massen und q ihre Positionen sind. Allerdings werden Teilchen in der konventionellen Quantenmechanik phänomenologisch definiert, das heißt mittels des Begriffs "Messung". Vor einer Messung ist es also sinnlos, von Teilchen zu sprechen [4]. In der Kopenhagener Interpretation führt eine Messung zudem zum sogenannten Kollaps der

[1] Der Name Bohmsche Mechanik ist etwas irreführend, da die Idee schon 1927 von de Broglie skizziert wurde. Deshalb wird diese Version der Quantenmechanik auch De-Broglie-Bohm-Pilot-Wave-Theorie genannt. Allerdings hat de Broglie seine Idee nicht weiterverfolgt wegen eines Einwandes von Pauli. Diesen widerlegte Bohm 1952 in zwei Artikeln [8,9], in denen er de Broglies Idee wieder aufnahm und entscheidend weiterentwickelte. Aus diesem Grund werde ich in dieser Arbeit den gebräuchlicheren Namen Bohmsche Mechanik benutzen.

[2] Den Begriff "konventionelle Quantenmechanik" werde ich im Folgenden für die Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik verwenden, wobei die meisten Aussagen auch auf fast alle anderen Interpretationen zutreffen.

[3] In diesem Zusammenhang bedeutet "ontologisch", dass die Theorie Auskunft über Objekte gibt, die unabhängig davon existieren, ob sie beobachtet bzw. gemessen werden. Im Sinn Einsteins sind diese Objekte real. Im Folgenden wird der Begriff "real" in diesem Sinn verwendet.

Wellenfunktion (Reduktion auf eine Eigenfunktion des gemessenen Operators), da ansonsten die Linearität der Schrödingergleichung eine Superposition der Messwerte (Eigenwerte) bewirken würde. Dies würde aber jeglichem natürlichen Verständnis widersprechen. Die Wellenfunktion kollabiert bei jeder Messung genau so, dass die Messwerte statistisch nach der Bornschen Regel $\rho = |\psi|^2$ verteilt sind. Der Begriff "Messung" zieht jedoch eine Grenze zwischen makroskopischer (klassisch beschreibbarer) und mikroskopischer Welt. Diese Grenze ist weder in der klassischen Physik noch in der Quantenmechanik auf irgendeine Weise in der Theorie selbst exakt definiert. Durch die vage Definition einer Messung kommt es zum bekannten Messproblem, das u.a. durch Schrödingers Katzenbeispiel illustriert wird [5,6,7]. Alle erwähnten konzeptuellen Probleme werden in der Bohmschen Mechanik durch die Einführung einer klaren Ontologie gelöst. Dieser Bezug zur Realität wird dadurch hergestellt, dass die Wellenfunktion in der Bohmschen Mechanik ein sogenanntes Führungsfeld für Punktteilchen darstellt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_k(t)}{\partial t} &\equiv v_{k,t}^{\psi(q,t)}(q_1(t), q_2(t), \ldots q_N(t)) = \frac{j_{k,t}^{\psi(q,t)}}{\rho_t^{\psi(q,t)}}(q_1(t), q_2(t), \ldots q_N(t)) \\ &= \frac{\hbar}{m_k} \operatorname{Im} \frac{\overline{\psi(q,t)} \frac{\partial}{\partial q_k} \psi(q,t)}{|\psi(q,t)|^2}(q_1(t), q_2(t), \ldots q_N(t)) = \frac{\hbar}{m_k} \frac{\partial}{\partial q_k} S(q_1(t), q_2(t), \ldots q_N(t))\end{aligned} \tag{2}$$

Dabei ist j_k der quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsstrom des k-ten Teilchens und ρ die Wahrscheinlichkeitsdichte. Im letzten Schritt wurde die Polardarstellung der Wellenfunktion $\psi = R e^{iS}$ benutzt. Diese Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld lässt sich auf verschiedene Weise herleiten (siehe z.B. [8,9,7,10,11]).

Alternativ können anstatt von Teilchen auch z.B. Felder als ontologischer Bezug verwendet werden, die sich gemäß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(q,t) = -\frac{\hbar}{m_k} \nabla^2 \frac{\delta S[\varphi(q,t)]}{\delta \varphi(q,t)} \tag{3}$$

entwickeln, wobei $\delta S / \delta \varphi$ die Funktionalableitung von S nach φ ist [4]. Dabei ist φ ein reales Feld und $S[\varphi(q,t)]$ die Phase des sog. Wellenfunktionals (für ei-

[4] Siehe [22] für die Definition einer Funktionalableitung.

ne ausführliche Darstellung siehe [12]). Die Feldontologie spielt allerdings in dieser Arbeit nur für relativistische Bosonenfelder (siehe Abschnitt 4.3.2.) eine Rolle.

Die Wellenfunktion entwickelt sich in der Bohmschen Mechanik wie in der konventionellen Quantenmechanik gemäß der Schrödingergleichung (1)[5]. Im Unterschied zur konventionellen Quantenmechanik entwickelt sich in der Bohmschen Mechanik zwar nur die Wellenfunktion des gesamten Universums exakt nach der Schrödingergleichung, aber approximativ gilt diese auch für die effektive bzw. bedingte Wellenfunktion eines Systems. Eine ausführliche Erläuterung dazu findet sich u.a. in [7,11].

Der Begriff "Messung" spielt allerdings in der Bohmschen Mechanik keine fundamentale Rolle, da die Teilchen und deren Orte jederzeit definiert sind. Eine Messung ist in der Bohmschen Mechanik nichts anderes als eine Wechselwirkung zwischen gemessenem System und den Teilchen des Messapparates. Weil der Messapparat auch aus Teilchen besteht und diese sich mittels der Bohmschen Mechanik als quantenmechanisches System beschreiben lassen, gibt es in der Bohmschen Mechanik keine Grenze zwischen der mikroskopischen und der makroskopischen Welt. Deshalb entsteht in der Bohmschen Mechanik kein Messproblem. Bei einer Messung kommt es zwar zu einem "effektiven Kollaps" der Wellenfunktion. Dies bedeutet aber nur, dass sich durch die Wechselwirkung das gemessene System nur noch zusammen mit dem Messapparat beschreiben lässt. Die Wellenfunktion des gesamten Systems (inklusive Messapparat) entwickelt sich weiterhin (approximativ) nach der Schrödingergleichung.

Trotzdem sind bei der statistischen Analyse der Theorie mögliche Einflüsse von Messvorgängen zu berücksichtigen. Insbesondere können sich aufgrund der Nichtlokaliät (siehe Abschnitt 2.3.) durch einen Messvorgang die Bahnen der Teilchen ändern, d.h. die Orte der Teilchen sind im Fall einer Messung nicht identisch mit den Orten der Teilchen ohne Messung.

[5] Dies gilt wie in der konventionellen Quantenmechanik nur für nichtrelativistische spinlose Teilchen; für Teilchen mit Spin ist die zeitliche Entwicklung durch die Pauligleichung gegeben (siehe z.B. [7,10,11]).

Gleichung (2) gibt die Entwicklung eines isolierten Systems an. Bei gegebenen Anfangswerten für die Wellenfunktion und Teilchenkonfiguration zu einem beliebigen Zeitpunkt sind demnach die Orte der Teilchen zu jeder Zeit determiniert. Bei Messungen des Ortes ändert sich die Wellenfunktion (s.o.) und damit auch die Statistik der Teilchenorte. Dies ist ein wichtiger Punkt bei der Analyse der Bohmsche Mechanik.

Durch Gleichung (2) wird mithilfe von Teilchen ein deutlicher Bezug zur physikalischen Realität hergestellt. Dadurch ist auch die Wellenfunktion ein reales Objekt auf dem Konfigurationsraum.

Von entscheidender Bedeutung ist außerdem die Tatsache, dass die Bohmsche Mechanik dieselben statistischen Aussagen macht wie die konventionelle Quantenmechanik, worauf ich in den folgenden Abschnitten noch eingehen werde. Also stellt die Bohmsche Mechanik eine konsistente, realitätsbezogene Version der Quantenmechanik dar.

2.2. Quantengleichgewichtshypothese

Die erwähnte Übereinstimmung der Statistiken einer Messung zwischen Bohmscher Mechanik und Quantenmechanik beruht auf der sog. Quantengleichgewichtshypothese. Sie besagt, dass die Orte der Teilchen auch in der Bohmschen Mechanik gemäß $\rho = |\psi(q,t)|^2$ verteilt sind. Dies entspricht zwar genau der Bornschen Regel in der konventionellen Quantenmechanik, muss aber in der Bohmschen Mechanik nicht als zusätzliches Axiom eingeführt werden, sondern lässt sich innerhalb der Theorie begründen. Dazu benutzt man die quantenmechanische Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_t^{\psi(q,t)}}{\partial t} + \mathrm{div}(j_t^{\psi(q,t)}) = 0, \tag{4}$$

die aus dem Prinzip der Wahrscheinlichkeitserhaltung folgt. Aus

$$j_{k,t}^{\psi(q,t)} = |\psi(q,t)|^2 v_{k,t}^{\psi(q,t)} = \frac{\hbar}{m_k} \mathrm{Im}(\overline{\psi(q,t)} \frac{\partial}{\partial q_k} \psi(q,t)) \tag{5}$$

(siehe (2)) ergibt sich, dass $\rho = |\psi(q,t)|^2$ die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Das bedeutet: Wenn diese Verteilung zu irgendeinem Zeitpunkt gültig ist, dann sind die Messwerte zu jedem beliebigen Zeitpunkt gemäß $\rho = |\psi(q,t)|^2$ verteilt.

Hierbei muss zwischen den Positionen der Teilchen mit und ohne Messung unterschieden werden, da diese, wie schon erwähnt, in der Bohmschen Mechanik nicht identisch sind.
Eine detaillierte Herleitung der Quantengleichgewichtshypothese und eine Diskussion, warum die Quantengleichgewichtshypothese überhaupt zu irgendeiner Zeit erfüllt ist, findet sich in [13,11]. Die Quantengleichgewichtshypothese impliziert auch die Heisenbergsche Unschärferelation.

2.3. Nichtlokalität

Das entscheidende Hindernis bei einer relativistischen Formulierung der Bohmschen Mechanik ist, wie in Kapitel 4 ausführlich erläutert werden wird, die Nichtlokalität der Bohmschen Mechanik. In diesem Zusammenhang bedeutet "lokal", dass zwei räumlich getrennte Teilchen einander nicht mit Überlichtgeschwindigkeit beeinflussen können. In der Quantenmechanik existiert eine überlichtschnelle Beeinflussung zwischen räumlich getrennten, verschränkten[6] Teilchen, die durch zahlreiche Experimente nachgewiesen wurde (u.a. von Aspect et al. [14]). Einstein, Podolsky und Rosen erkannten dies, folgerten allerdings, dass die Formulierung der konventionellen Quantenmechanik unvollständig sei [15]. Für sie war es unvorstellbar, dass eine fundamentale Theorie nichtlokal sein könnte. Bohm formulierte das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradox neu und diskutierte es anhand des folgenden Gedankenexperiments, das auch Grundlage für die experimentelle Bestätigung der Nichtlokalität verschränkter Teilchen ist [16]: Ein Paar verschränkter Teilchen wird von einer Quelle in verschiedene Richtungen emittiert. Der Spin jedes Teilchens wird mit je einem Stern-Gerlach-Magneten gemessen. Laut den Vorhersagen der Quantenmechanik sind die Spins perfekt antikorreliert, das heißt, wenn der Spin eines Teilchens "up" ist, ist der Spin des anderen Teilchens "down" und umgekehrt. Dies ist unabhängig von der Entfernung der Stern-Gerlach-Magneten voneinander. Aus dieser Beobachtung wird bereits deutlich, dass es sich um ein nichtlokales Phänomen handeln muss. Bell lei-

[6] Verschränkte Systeme sind Systeme, deren Wellenfunktionen nicht das Produkt der Wellenfunktionen ihrer Untersysteme sind.

tet in seinem Artikel "On the Einstein-Podolsky-Rosen-Paradox" eine Ungleichung her, die für alle lokalen Theorien erfüllt sein muss, und zeigt, dass die quantenmechanischen Vorhersagen durch keine lokale Theorie reproduzierbar sind ([6] Kapitel 2). Deshalb muss jede fundamentale Theorie nichtlokal sein.

Besonders deutlich wird das nichtlokale Verhalten eines quantenmechanischen Systems in der Bohmschen Mechanik. Dies sieht man schon aus Gleichung (2), in der die Geschwindigkeit (zeitliche Ableitung des Ortes) eines Teilchens zu einem Zeitpunkt durch die Orte aller Teilchen im System zum selben Zeitpunkt bestimmt ist. Die Beeinflussung erfolgt also instantan. In diesem Zusammenhang ist wichtig, dass mittels dieser Beeinflussung keine Informationsübertragung möglich ist (siehe z.B. [7,17]). Diese Tatsache folgt daraus, dass das Ergebnis der ersten Spinmessung in oben beschriebenem Gedankenexperiment zufällig (nach der Quantengleichgewichtshypothese) ist. Deshalb kann man trotz der perfekten Antikorrelation keine Signale übertragen. Diese Zusammenhänge gelten sowohl in der konventionellen Quantenmechanik als auch in der Bohmschen Mechanik, wobei in der konventionellen Quantenmechanik, wie erwähnt, der Begriff "Teilchen" erst durch die Messung definiert ist. Das ist auch der Grund, warum die Nichtlokalität in der Bohmschen Mechanik eine besondere Rolle spielt.

3. Grundkonzepte der (speziellen) Relativitätstheorie

3.1. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, Lorentz-Transformationen

Die spezielle Relativitätstheorie beruht darauf, dass die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in allen sich gleichmäßig bewegenden Inertialsystemen gleich ist. Dies wurde durch zahlreiche Experimente bestätigt, u.a. durch das bekannte Michelson-Morley-Experiment. Des weiteren gilt (ähnlich wie in der Newtonschen Mechanik) das sogenannte Relativitätsprinzip, das besagt, dass sich Inertialsysteme nicht durch ihre physikalischen Gesetze unterscheiden. Insbesondere wird kein Inertialsystem durch irgendetwas ausgezeichnet. Aus diesen beiden Postulaten lassen sich die Lorentz-Transformationen herleiten [18,19]. Diese lauten für ein sich in x-Richtung gleichmäßig bewegendes Inertialsystem:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ und } \beta = \frac{v}{c},$$

wobei v die Relativgeschwindigkeit der Inertialsysteme ist. Da für $v > c$ der Faktor γ imaginär wird, ist grundsätzlich keine Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit möglich.[7] Die Lorentz-Transformationen implizieren bekanntlich die Tatsache, dass Raum und Zeit in der Relativitätstheorie keine absoluten Größen sind, sondern vom Bezugssystem abhängen. Dadurch ergibt der Begriff "Gleichzeitigkeit" nur innerhalb eines Bezugssystems Sinn. Zwei Ereig-

[7] Die einzige Ausnahme wären sogenannte Tachyonen, das heißt fiktive Teilchen, die sich immer mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen. Dieses Thema spielt für diese Arbeit keine Rolle, da es die konzeptuellen Probleme nicht lösen kann (siehe [17], Kapitel 3).

nisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, sind durch die sog. Zeitdilatation im Allgemeinen in einem anderen Inertialsystem nicht gleichzeitig. Analog zu Raum und Zeit transformieren sich auch Energie und Impuls beim Wechsel zwischen Bezugssystemen gemäß der entsprechenden Lorentz-Transformation.

Die Lorentz-Transformationen (6) lassen sich auch als Matrix schreiben:

$$(x^{\mu})' = \Lambda^{\mu}_{\lambda} x^{\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^{\lambda}, \quad \lambda, \mu = 0...3,\ x^0 = ct\,. \tag{7}$$

Hierbei habe ich die übliche Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Die Matrix $\Lambda_{\lambda\mu}$ ist Element der sogenannten Lorentzgruppe L, die alle Lorentz-Transformationen (bezüglich jeder Raumrichtung) und die Drehgruppe SO(3) enthält. Eine Größe heißt lorentzinvariant, wenn sie sich bei Multiplikation mit $\Lambda \in L$ nicht ändert. Nimmt man zu den Lorentz-Transformationen noch raumzeitliche Translationen (Verschiebungen) hinzu, ergeben sich die sog. Poincaré-Transformationen[8]:

$$(x^{\mu})' = \Lambda^{\mu}_{\lambda} x^{\lambda} + a \qquad \text{für } \Lambda \in L, a \in \mathfrak{M}, \tag{8}$$

wobei a ein Vektor im Minkowski-Raum ist (s.u.).

Der Begriff "lorentzinvariant" lässt sich auch auf physikalische Theorien übertragen. In diesem Sinne bedeutet "lorentzinvariant", dass die Gesetze einer Theorie beim Übergang zwischen verschiedenen Bezugssystemen, die ja durch Lorentz-Transformationen miteinander verknüpft sind, ihre Form nicht verlieren, das heißt, dass sich die durch die Gesetze beschriebenen Möglichkeiten für die Entwicklung der Objekte der Theorie beim Wechsel des Bezugssystems nicht ändern. Diese Forderung ist äquivalent zum Relativitätsprinzip. Sie bedeutet nicht, dass eine bestimmte Entwicklung in allen Bezugssystemen gleich aussieht. Z.B. sind die Maxwellgleichungen lorentzinvariant, obwohl bekanntermaßen beim Wechsel zwischen Bezugssystemen elektrische und magnetische Felder ineinander übergehen.

---

[8] In der Literatur wird manchmal statt Poincaré-Transformation auch inhomogene Lorentz-Transformation geschrieben.

3.2. Struktur der Raumzeit

Die spezielle Relativitätstheorie lässt sich am besten im Minkowski-Raum $\mathfrak{M}$ formulieren. Dies ist ein vierdimensionaler Vektorraum mit folgender Metrik:[9]

$$g_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Hier sieht man, dass, wie bereits erwähnt, die Zeit in der Relativitätstheorie genauso wie eine räumliche Koordinate behandelt wird.[10] Diese Symmetrie spielt für jede relativistische Formulierung einer Theorie eine entscheidende Rolle. Theorien werden als kovariant bezeichnet, wenn sie die Symmetrie der Raumzeit beachten, d.h., wenn in ihren Gesetzen keine Koordinate ausgezeichnet ist. Dies ist praktisch äquivalent zur Lorentzinvarianz der Theorie, bezieht sich aber prinzipiell nur auf ihre Formulierung. Die Metrik ist in der speziellen Relativitätstheorie die einzige Struktur der Raumzeit.

Der metrische Tensor (9) verknüpft ko- und kontravariante Vektoren bzw. Tensoren[11] miteinander über die Beziehung $x_\lambda = g_{\lambda\mu} x^\mu$. Kontravariante Tensoren transformieren sich beim Wechsel zwischen Inertialsystemen wie die Koordinaten, während sich kovariante Tensoren gemäß der inversen Lorentz-Transformations-Matrix ändern. Notiert werden kovariante Tensoren mittels eines Subskripts, kontravariante durch ein Superskript. [20]

Die Metrik induziert außerdem eine (Pseudo-)Norm. Dadurch ist das Abstandsquadrat zwischen zwei Ereignissen durch

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2 \tag{10}$$

definiert. Dieses ist offensichtlich lorentzinvariant.

Ein wichtiger Punkt bei der Betrachtung der speziellen Relativitätstheorie im Minkowski-Raum ist, dass sich dieser für ein gegebenes Ereignis (Punkt im Minkowski-Raum) zerlegen lässt. Zwei Ereignisse, für die das Abstandsquad-

---

[9] Für die Vorzeichen gibt es keine einheitliche Konvention.
[10] Der einzige Unterschied ist das Vorzeichen und der Faktor c.
[11] Die Bezeichnung "kovariant" wird bei Tensoren in einer etwas anderen Bedeutung als bei Theorien oder Gesetzen verwendet.

rat $(\Delta s)^2 > 0$ ist, heißen zeitartig getrennt, für $(\Delta s)^2 = 0$ lichtartig, für $(\Delta s)^2 < 0$ raumartig. Die Bahn eines Teilchens mit Masse größer 0 ist demnach zeitartig und die eines Teilchens mit Masse gleich 0 lichtartig. Zeitartige Ereignisse liegen innerhalb des sogenannten Lichtkegels, der durch Ereignisse begrenzt wird, die von einem Ereignis lichtartig getrennt sind.

3.3. Lokale Kausalität

Raumartig getrennte Ereignisse können nicht durch Lichtsignale gegenseitig auf irgendeine Weise bedingt sein. Dafür wären Signale mit Überlichtgeschwindigkeit notwendig. Dies würde aber zu Paradoxien führen, da dann durch Lorentz-Transformation Ursache und Wirkung vertauscht werden würden. [17]
Der Grund dafür ist, dass es immer ein Bezugssystem gibt, in dem die beiden raumartig getrennten Ereignisse zeitlich in umgekehrter Reihenfolge stattfinden. Dies sieht man am leichtesten daran, dass es immer ein Bezugssystem gibt, in dem die beiden raumartig getrennten Ereignisse gleichzeitig sind. Wegen $(\Delta s)^2 < 0$ gibt es immer ein $\beta < 1$, für das für raumartig getrennte Ereignisse, zwischen denen in einem Inertialsystem die Zeit Δt vergeht, in einem in x-Richtung sich bewegenden Inertialsystem $c\Delta t = \beta \Delta x$ gilt. Da β eine kontinuierliche Größe ist, folgt direkt, dass die Reihenfolge raumartig getrennter Ereignisse abhängig vom Bezugssystem ist. Dies ist bei zeit- und lichtartig getrennten Ereignissen nicht der Fall, wie man analog nachprüfen kann. [19]
Das bedeutet, dass die Begriffe Ursache und Wirkung nur bei zeit- bzw. lichtartigen Ereignissen sinnvoll sind. Bell nannte dies lokale Kausalität [6].

4. Ansätze für eine relativistische Bohmsche Mechanik

4.1. N unabhängige Diracteilchen

Die in Kapitel 2 vorgestellten Grundgedanken der nicht-relativistischen Bohmschen Mechanik, insbesondere ihre deutliche Ontologie, können ohne große Schwierigkeiten auf den Fall von N unabhängigen (d.h. nicht verschränkten) Diracteilchen übertragen werden. Diracteilchen sind Teilchen mit Spin $\hbar/2$, deren Wellenfunktionen sich ohne Wechselwirkung und äußere Felder gemäß der Diracgleichung

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-ic\hbar\sum_{k=1}^{3}\alpha^k\frac{\partial}{\partial x^k}+mc^2\beta\right)\psi \qquad (11)$$

entwickeln [21]. Im Gegensatz zur Schrödingergleichung ist die Wellenfunktion ψ hierbei keine komplexe skalare Funktion, sondern eine komplexe spinorwertige Funktion. Spinoren lassen sich mittels Tensoren (wie z.B. Vektoren oder Matrizen) darstellen, transformieren sich aber unter Lorentz- bzw. Poincaré-Transformationen anders als Tensoren, nämlich gemäß

$$\psi'(x')=S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}(x'-a)) \quad \text{mit}\, S^\dagger(\Lambda)S(\Lambda)=\pm(\Lambda^{00}\mathbb{1}-\sum_{k=1}^{3}\Lambda^{0k}\alpha^k), \qquad (12)$$

wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist (siehe u.a. [22]). Mathematisch betrachtet ist der Raum der Lösungen der Diracgleichung isomorph zu $\mathbb{C}^4$. Sie lassen sich also mithilfe von Spaltenvektoren darstellen. Auch die in der Diracgleichung vorkommenden Größen α^k und β sind Spinoren. Diese lassen sich aber durch 4×4-Matrizen darstellen. Ich gebe sie hier in der sogenannten Weyl-Darstellung an[12]:

$$\alpha^k=\begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ \sigma^k & 0\end{pmatrix} \qquad \beta=\begin{pmatrix}\mathbb{1}_2 & 0\\ 0 & -\mathbb{1}_2\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

wobei σ^k die aus der Quantenmechanik bekannten Pauli-Matrizen sind. $\mathbb{1}_2$ bezeichnet die 2×2-Einheitsmatrix und 0 die 2×2-Nullmatrix.

[12] Neben der Weyl-Darstellung existieren noch weitere äquivalente Darstellungen (siehe z.B. [21])

Multipliziert man (11) mit $(i\hbar)^{-1}$, erhält man

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+(c\sum_{k=1}^{3}\alpha^k+\frac{imc^2}{\hbar}\beta)\psi=0\,. \tag{14}$$

Wenn man dann diese Gleichung von links mit $\psi^\dagger$, d.h. dem hermitesch Konjugierten von ψ, sowie die hermitesch konjugierte Gleichung von (14) mit ψ von rechts multipliziert, und diese beiden neuen Gleichungen unter Benutzung der Selbstadjungiertheit von α^k und β, addiert, erhält man

$$\frac{\partial\left(\psi^\dagger\psi\right)}{\partial t}+c\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}(\psi^\dagger\alpha^k\psi)=0\,. \tag{15}$$

Ein Vergleich von (15) mit der Kontinuitätsgleichung (4) ergibt

$$\rho=\psi^\dagger\psi \qquad j^k=c\psi^\dagger\alpha^k\psi \tag{16}$$

(siehe für eine genauere Herleitung: [22]). Analog zum nicht-relativistischen Fall (vgl. Gleichung (2)) lässt sich durch diese Größen ein Bohmsches Führungsgesetz[13] für ein freies Diracteilchen formulieren:

$$\frac{d\mathbf{X}(\tau)}{d\tau}=\frac{\mathbf{j}}{\rho}(\tau)=\frac{c\psi^\dagger(\tau)\boldsymbol{\alpha}\psi(\tau)}{\psi^\dagger(\tau)\psi(\tau)} \tag{17}$$

mit $\mathbf{j}=(j^0,j^1,j^2,j^3)$, $j^0=c\rho$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^0,\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ und $\alpha^0=\mathbb{1}$. Dabei ist $\mathbf{X}(\tau)$ die raumzeitliche Bahn des Teilchens, wobei τ nur die Parametrisierung der Bahn ändert. Auch eine Multiplikation von j^λ mit einem beliebigen Skalar ändert nur die Parametrisierung, weil dies einem Wechsel zwischen Inertialsystemen entspricht. Der Vierer-Vektor j^λ heißt Vierer-Wahrscheinlichkeitsstrom. Gleichung (17) lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau}\sim\mathbf{j}\sim\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi\,, \tag{18}$$

wobei $\sim$ proportional bedeutet. Geometrisch formuliert lautet die Gleichung:

$$\dot{\mathbf{X}}\parallel\mathbf{j}\,, \tag{19}$$

[13] In diesem Kapitel wird die Bezeichnung "Bohmsch" insofern in einem allgemeineren Sinn verwendet, als sie sich jetzt nur auf die in Kapitel 2 dargestellten Grundkonzepte der Bohmschen Mechanik bezieht.

wobei $\parallel$ parallel bedeutet. Daran erkennt man, dass nur die Richtung von **j** für die Dynamik relevant ist. [23]

Die Gleichungen (11)-(18) können auch mithilfe von γ-Matrizen geschrieben werden. Diese sind durch

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \beta \\ \gamma^k &= \beta\alpha^k\end{aligned} \tag{20}$$

definiert. Gleichung (14) lautet in dieser Form:

$$(-i\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{mc}{\hbar})\psi = 0\,, \tag{21}$$

wobei die Summenkonvention über $\lambda = 0,...,3$ benutzt wurde. Diese Form der Diracgleichung macht ihre Kovarianz deutlich, da über alle vier Raumzeitkoordinaten summiert wird. Gleichung (21) heißt in natürlichen Einheiten $(\hbar = c = 1)$:

$$(-i\gamma \cdot \partial + m)\psi = 0\,. \tag{22}$$

Hierbei ist

$$\gamma \cdot \partial \equiv \gamma^\lambda \cdot \partial_\lambda = \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\,. \tag{23}$$

Mit dieser Abkürzung, die im Folgenden als Konvention angesehen wird, lässt sich die Kontinuitätsgleichung (4) ebenfalls kovariant darstellen:

$$\partial \cdot \mathbf{j} = 0\,. \tag{24}$$

Wie aus der Weyl-Darstellung (13) ersichtlich, gilt $\alpha^k = \beta\beta\alpha^k = \gamma^0\gamma^k$. Mit dieser Beziehung kann man auch Gleichung (16) durch γ-Matrizen ausdrücken:

$$j^\lambda = c\tilde{\psi}\gamma^\lambda\psi \tag{25}$$

mit $j^0 = c\rho$ und $\tilde{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$. Dementsprechend gilt für das Bohmsche Geschwindigkeitsfeld (vgl. (18)):

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} \sim \tilde{\psi}\gamma\psi \tag{26}$$

Hier besteht γ aus den Komponenten γ^λ (wie in (23)).

Wie bereits angedeutet, lassen sich alle in diesem Abschnitt erwähnten Gleichungen analog für N nicht-verschränkte Diracteilchen herleiten. In diesem

Fall ist die Wellenfunktion des gesamten Systems ein 4N-dimensionaler Spinor, der ein Tensor-Produkt aus N unabhängigen Komponenten ist. Das bedeutet, sie ist auf $(\mathbb{C}^4)^{\otimes N}$ darstellbar. Jede ihrer Komponenten entwickelt sich gemäß der Diracgleichung (11). Das Bohmsche Gesetz für alle N Teilchen lautet (vgl. (18) bzw. (26)):

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{d\tau} \sim \mathbf{j}_i = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha}_i \psi = \tilde{\psi}\gamma_i\psi, \quad i = 1 ... N. \tag{27}$$

Dabei ist $\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbb{1} \otimes ... \otimes \mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbb{1} \otimes ... \otimes \mathbb{1}$ und $\gamma_i = \gamma^0 \otimes ... \otimes \gamma^0 \otimes \gamma \otimes \gamma^0 \otimes ... \otimes \gamma^0$. $\mathbf{j}_i$ bezeichnet den Wahrscheinlichkeitsstrom des i-ten Teilchens. Dieser Vierer-Vektor weist ebenso wie im Ein-Teilchen-Fall immer in Zukunftsrichtung und ist zeitartig. Dadurch definiert Gleichung (27) Bahnen von tatsächlichen Teilchen. (vgl. [23])

Aufgrund der Transformationseigenschaften von Spinoren sind (22) und (27) lorentzinvariant. Gleichung (27) gilt unverändert auch für Diracteilchen in einem äußeren Feld (siehe [11]).

Zu erwähnen ist außerdem, dass $\rho = \tilde{\psi}\gamma\psi = \psi^\dagger\psi$ auch im Fall N unabhängiger Teilchen die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Dies gilt in allen Inertialsystemen.

Entscheidend ist ebenfalls, dass die experimentellen Daten eine Interpretation von ρ als Wahrscheinlichkeit zulassen. Aus diesen Gründen wird ρ Quantengleichgewicht genannt (vgl. Abschnitt 2.2. für den nicht-relativistischen Fall).

4.2. Konzeptuelle Schwierigkeiten im allgemeinen Fall

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, ist eine relativistische Formulierung der Bohmschen Mechanik im Fall N nicht-verschränkter Diracteilchen ohne konzeptuelle Probleme möglich. Durch die in Abschnitt 2.3. beschriebene Nichtlokalität treten bei verschränkten Wellenfunktionen die im Folgenden diskutierten konzeptuellen Schwierigkeiten auf.

In der speziellen Relativitätstheorie ist der Begriff Gleichzeitigkeit, wie in Kapitel 3 beschrieben, vom Inertialsystem abhängig, während in der nicht-relativistischen Bohmschen Mechanik das Bewegungsgesetz (2) einen universellen Gleichzeitigkeitsbegriff verlangt, da ansonsten die Teilchenbahnen nicht wohldefiniert wären. Eine mögliche Lösung ist, ein bestimmtes Inertialsystem festzulegen, in dem das Bewegungsgesetz formuliert wird. Dies ist zwar offensichtlich ein Widerspruch zum Relativitätsprinzip, doch lassen sich dadurch alle Vorhersagen der speziellen Relativitätstheorie (auch das Michelson-Morley-Experiment) korrekt reproduzieren. Das ist die Grundidee der sogenannten Hypersurface-Bohm-Dirac-Modelle, die im nächsten Abschnitt erklärt werden. Die Verletzung des Relativitätsprinzips lässt sich dadurch umgehen, dass das Bezugssystem durch ein lorentzinvariantes Gesetz bestimmt wird. Auch ist es möglich, die Wahl des Bezugssystems von der Wellenfunktion bzw. Teilchenkonfiguration abhängig zu machen (siehe Abschnitt 4.3.3.).

Es existieren aber auch Möglichkeiten, das oben beschriebene Problem ohne Festlegung eines Bezugssystems zu lösen. Auf diese Möglichkeiten und damit verbundene Schwierigkeiten werde ich in Abschnitt 4.4. eingehen.

Ein anderes konzeptuelles Problem besteht darin, dass die Quantengleichgewichtsverteilung im Fall verschränkter Teilchen nicht in jedem Inertialsystem erfüllt sein kann. Dies gilt für jede beliebige statistische Verteilung und folgt daraus, dass sich beim Wechsel zwischen Inertialsystemen Zeit- und Raumkoordinaten verändern und dadurch die Orte der Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt ebenfalls anders verteilt sind. (Für eine detaillierte Darstellung vergleiche [24].) In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass die Vorhersagen einer relativistischen Bohmschen Mechanik schon dann mit denen der relativistischen Quantenmechanik übereinstimmen, wenn die Quantengleichgewichtsverteilung in einem beliebigen Inertialsystem erfüllt ist (vergleiche ebenfalls [24]).

Des weiteren ist es im Fall verschränkter Teilchen deutlich schwieriger, äußere Felder mit einzubeziehen.

4.3. Modelle mit Blätterung

4.3.1. Hypersurface-Bohm-Dirac-Modelle

Hypersurface-Bohm-Dirac-Modelle definieren in der Raumzeit (also im Minkowski-Raum) eine zusätzliche Struktur, nämlich eine Blätterung der Raumzeit in dreidimensionale raumartige Hyperflächen. Bei einer Blätterung liegt jeder Punkt der Raumzeit auf genau einer dieser raumartigen Hyperflächen. Die Hyperflächen werden auch Blätter genannt (vgl. [20]). Der Begriff "raumartig" bedeutet, dass die Hyperflächen raumartig getrennte Punkte in der Raumzeit miteinander verbinden (siehe Abschnitt 3.2.). Die Hyperflächen ermöglichen eine Definition des Begriffs der Gleichzeitigkeit, indem die Zeitkoordinate so gewählt wird, dass sie auf jeder Hyperfläche konstant ist. Dies kann man bei ebenen Hyperflächen immer durch eine Lorentz-Transformation erreichen. Die Hyperflächen dürfen aber auch gekrümmt sein. In diesem Fall führt man einen Zeitparameter τ ein, der die Hyperflächen (kontinuierlich) durchnummeriert. Mit diesem lässt sich Gleichung (27) folgendermaßen verallgemeinern:

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{X}_i}{d\tau}\left(\mathbf{X}_1(\Sigma),\mathbf{X}_2(\Sigma),\ldots,\mathbf{X}_N(\Sigma)\right) \sim \mathbf{j}^{\lambda_1\cdots\lambda_N}\left(\mathbf{X}_1(\Sigma),\mathbf{X}_2(\Sigma),\ldots,\mathbf{X}_N(\Sigma)\right) = \\ &c\tilde{\psi}\left(\mathbf{X}_1(\Sigma),\mathbf{X}_2(\Sigma),\ldots,\mathbf{X}_N(\Sigma)\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\gamma^{\lambda_j}\bullet n_{\lambda_j}\right)\gamma^{\lambda_i}\psi\left(\mathbf{X}_1(\Sigma),\mathbf{X}_2(\Sigma),\ldots,\mathbf{X}_N(\Sigma)\right).\end{aligned} \tag{28}$$

Dabei ist $\mathbf{j}^{\lambda_1\cdots\lambda_N}$ der auf eine Hyperfläche bezogene (Wahrscheinlichkeits-) Tensorstrom der N Teilchen, n der in Zukunftsrichtung weisende Einheitsnormalenvektor auf die Hyperfläche Σ und $\mathbf{X}_i(\Sigma)$ der Schnittpunkt der Bahn des i-ten Teilchens mit der Hyperfläche. Die Wellenfunktion $\psi\left(\mathbf{X}_1(\Sigma),\mathbf{X}_2(\Sigma),\ldots,\mathbf{X}_N(\Sigma)\right)$ ist eine spinorwertige Funktion auf dem kartesischen Produkt von N Minkowski-Räumen, d.h.: $\psi : \mathfrak{M}^N \to (\mathbb{C}^4)^{\otimes N}$. Sie wird als Multitime-Wellenfunktion bezeichnet, da sie von N Raumzeitpunkten abhängt. Beachtenswert ist die Ähnlichkeit von Gleichung (28) mit Gleichung (2) in Bezug auf die Nichtlokalität. Im Fall nicht-verschränkter Teilchen reduziert sich Gleichung (28) auf Gleichung (27), da die Blätterung dann keine Rolle

spielt. Definitionsgemäß ist die Normale auf eine raumartige Hyperfläche zeitartig.
Mithilfe des Normaleneinheitsvektors auf eine Hyperfläche lässt sich der Wahrscheinlichkeitsstrom wie in Gleichung (28) auf verschränkte Teilchen verallgemeinern, ohne dass seine wesentlichen Eigenschaften verloren gehen. Er erfüllt die Kontinuitätsgleichung (24), wobei

$$\rho\left(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N\right)=j^{0_1\ldots 0_N}\left(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N\right)=c\tilde{\psi}\left(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N\right)\left(\prod_{i=1}^{N}\gamma^i\bullet n_i\right)\psi\left(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N\right) \quad (29)$$

gilt. Der aus dem Tensorstrom (28) ableitbare Wahrscheinlichkeitsstrom eines Teilchens weist außerdem in Zukunftsrichtung und ist zeitartig (für einen Beweis siehe [23]). Deshalb sind die durch Gleichung (28) definierten Teilchenbahnen tatsächlich wohldefiniert. Außerdem stellt (29) ein Analogon zum Quantengleichgewicht der nichtrelativistischen Bohmschen Mechanik (siehe Abschnitt 2.2.) dar. Genauso wie die Quantengleichgewichtsverteilung $\rho=|\psi|^2$ für die Orte der Teilchen dort, ist eine Verteilung der Schnittpunkte $\mathbf{X}_i$ gemäß (29) Bedingung dafür, dass die empirischen Vorhersagen der relativistischen Bohmschen Mechanik mit denen eines entsprechenden relativistischen quantenmechanischen Modells übereinstimmen. Auch lässt sich (29) als Wahrscheinlichkeit interpretieren, da (29) positiv-definit ist und wie erwähnt die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Wichtig dabei ist ebenfalls, dass (29) unabhängig davon ist, welches der N Teilchen betrachtet wird, also für alle Teilchen in gleichem Maß gilt. Bohm zeigte, dass die Wahl des Bezugssystems keinen Einfluss auf die empirischen Vorhersagen hat [25]. Dies gilt trotz der Tatsache, dass (29) nicht auf jeder Hyperfläche erfüllt sein kann. Es genügt für die experimentelle Übereinstimmung, dass (29) auf einer beliebigen Hyperfläche der Blätterung erfüllt ist (vgl. [24]).

4.3.2. Bosonenfelder

Bisher wurden in diesem Kapitel nur Diracteilchen, d.h. Fermionen, betrachtet. Bosonen, also Teilchen mit ganzzahligem Spin, lassen sich am besten mithilfe der Feld-Ontologie beschreiben. Dies wurde bereits von Bohm erkannt [9,25], wobei im nicht-relativistischen Fall auch die Teilchen-Ontologie durchaus sinnvoll ist (vgl. [7]). Im relativistischen Fall wird die Entwicklung der Wellenfunktion bei spinlosen Teilchen (z.B. Photonen) durch die Klein-Gordon-Gleichung beschrieben:

$$\left(\square - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0\,, \tag{30}$$

wobei $\square = \partial^\lambda \partial_\lambda$ den D'Alembert-Operator bezeichnet. Der entsprechende Ausdruck für den Wahrscheinlichkeitsstrom lautet

$$j^\lambda = -\frac{\hbar}{2i\mathrm{m}}\left(\overline{\psi}\partial_\lambda \psi - \psi \partial_\lambda \overline{\psi}\right). \tag{31}$$

Dieser erfüllt zwar die Kontinuitätsgleichung, die Wahrscheinlichkeitsdichte j^0 kann aber negativ werden, weshalb eine direkte Interpretation als Wahrscheinlichkeit für Teilchenorte nicht möglich ist (vgl. u.a. [22,25]). Bei einer Feld-Ontologie lässt sich dieses Problem dadurch umgehen, dass j^0 als positive bzw. negative "Ladung" interpretiert wird (siehe [25]). Die Feldentwicklung ist ebenso wie die der Teilchenbahnen nichtlokal, weshalb es sinnvoll ist, auch jene mit Hilfe einer Blätterung zu beschreiben:

$$\frac{d\varphi(\mathbf{X})}{dn} \sim \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\psi_{\Sigma_\mathbf{X}}} \frac{\delta\psi_{\Sigma_\mathbf{X}}}{\delta\varphi_{\Sigma_\mathbf{X}}(\mathbf{X})}\right)\Bigg|_{\varphi|_{\Sigma_\mathbf{X}}} \tag{32}$$

Dabei ist $d\varphi/dn$ die Richtungsableitung von φ bezüglich der Normalen auf die Hyperfläche $\Sigma_\mathbf{X}$, die den Punkt $\mathbf{X}$ enthält, und $\varphi|_{\Sigma_\mathbf{X}}$ das Feld φ auf dieser Hyperfläche (vgl. [1]). Gleichung (32) beschreibt die Entwicklung eines masse- und spinlosen Feldes, wobei Verallgemeinerungen auf andere Teilchen möglich sind [12].

4.3.3. Mögliche Konstruktionen der Blätterung

Die einfachste Wahl einer Blätterung der Raumzeit ist dadurch definiert, dass in einem beliebigen Bezugssystem Hyperebenen, auf denen x^0 konstant ist, die Blätterung darstellen. Dies würde allerdings ein Bezugssystem auszeich-

nen, da ja in jedem anderen Bezugssystem die Zeitachse nicht orthogonal zur Blätterung verlaufen würde. Die Blätterung wäre also in diesem Fall eine statische Hintergrundstruktur ähnlich dem Äther. Dies wäre nicht auf fundamentaler Ebene mit dem Relativitätsprinzip vereinbar und deshalb nicht lorentzinvariant, auch wenn diese Verletzung wie erwähnt nicht experimentell nachweisbar wäre.
Um dieses grundsätzliche Problem zu vermindern, muss die Blätterung als unabhängiges Objekt der Realität durch ein lorentzinvariantes Gesetz dynamisch beschrieben werden. Dafür wurden verschiedene Möglichkeiten vorgeschlagen, von denen ich die einfachste im Folgenden kurz diskutieren werde. Diese benutzt als lorentzinvariantes Gesetz für den Normaleneinheitsvektor n^λ auf die Hyperflächen der Blätterung:

$$\partial_\lambda n^\mu = 0\,. \tag{33}$$

Dabei bezeichnet ∂_λ die Ableitung nach den Koordinaten x^λ und n^μ den Normaleneinheitsvektor einer Hyperfläche. Bedingung (33) bedeutet also nichts anderes, als dass die Hyperflächen zueinander parallele Hyperebenen sind (vgl. [23]). Um eine Blätterung der Raumzeit nach diesem Gesetz zu konstruieren, benötigt man als Anfangsbedingung irgendeine Hyperebene, zu der die restlichen Hyperebenen parallel definiert werden können. In gewissem Sinn ist eine solche Theorie fundamental lorentzinvariant, da alle Gesetze (für Wellenfunktion, Teilchenbahnen und Blätterung) lorentzinvariant sind. Da aber in der Relativitätstheorie (wie in Abschnitt 3.2 erwähnt) die Metrik die einzige Struktur der Raumzeit darstellt, bleibt hier wegen der zusätzlichen Struktur der Raumzeit ein nicht-relativistischer Beigeschmack. Dies trifft auf alle Modelle zu, die die Blätterung als zusätzliches Objekt beschreiben.
Dieses Problem lässt sich (zumindest teilweise) umgehen, indem man die Blätterung nicht als ein unabhängiges Objekt betrachtet, sondern sie in Abhängigkeit von der Wellenfunktion beschreibt. Dazu definiert man den Normalenvektor parallel zu einem kovarianten[14] Vektorfeld. Um eine raumar-

[14] In diesem Zusammenhang bedeutet kovariant, dass sich das Objekt wie ein Vektor transformiert. Dies ist eine etwas allgemeinere Bedeutung als in Kapitel 3.

tige Blätterung zu erhalten, benötigt man ein zeitartiges Vektorfeld. Diese Eigenschaft besitzt für ein System aus Diracteilchen z.B. das Feld

$$\mathbf{J}^{\lambda}(\mathbf{X}) = \langle\psi| j^{\lambda}(\mathbf{X}) |\psi\rangle . \tag{34}$$

Hier sind ψ die Wellenfunktion des Systems und $j^{\lambda} = : c\tilde{\Phi}\gamma^{\lambda}\Phi :$ im Prinzip der in Abschnitt 4.1 beschriebene Diracstrom, wobei $:$ die sogenannte Normalordnung bezeichnet und Φ ein Quantenfeld[15], das sich gemäß der Diracgleichung (21) entwickelt. Unter Normalordnung versteht man in der Quantenfeldtheorie, dass die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren so angeordnet sind, dass alle Erzeugungsoperatoren links von den Vernichtungsoperatoren stehen. Ansonsten wäre bei einem Vakuumzustand das Ergebnis nicht korrekt (vgl. [22]). Bei (34) ist allerdings zu beachten, dass das Vektorfeld nicht für jedes System integrabel ist und deshalb die entsprechende Blätterung in diesen Fällen aufgrund der fehlenden Eindeutigkeit des Normalenvektors nicht wohldefiniert wäre. Zwar könnte man nur den integrablen Teil von $\mathbf{J}^{\lambda}$ benutzen, allerdings ist dieser nicht zwangsläufig zeitartig (vgl. [1,22]).

Eine andere Alternative für ein zeitartiges kovariantes Tensorfeld im Fall von N Diracteilchen ist

$$\mathbf{J}^{\lambda_1 \cdots \lambda_N}(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N) = \langle\psi| : \frac{c^N}{N!}\prod_{k=1}^{N}\tilde{\Phi}(\mathbf{X}_k)\gamma^{\lambda_k}\Phi(\mathbf{X}_k) : |\psi\rangle , \tag{35}$$

wobei

$$\psi(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\langle 0|\prod_{k=1}^{N}\Phi(\mathbf{X}_k)|\psi\rangle \tag{36}$$

ist (vgl. [1]). Dabei stellt $|0\rangle$ den Vakuumzustand und $N!$ die möglichen Permutationen dar. (35) hat die gleichen prinzipiellen Schwierigkeiten wie (34), allerdings erinnert es an (29), u.a. da das Tensorfeld auf $\mathfrak{M}^N$ definiert ist.

Ein Vektorfeld, das sowohl für Fermionen als auch für Bosonen zeit- oder lichtartig und in Zukunftsrichtung weisend ist, wird durch

---

[15] Der Begriff "Quantenfeld" darf nicht verwechselt werden mit einem realen, ontologischen Feld, wie es in Abschnitt 4.3.2. beschrieben ist.

$$P^{\lambda} = \int_S d\sigma_{\mu}(\mathbf{X})\langle\psi|t^{\lambda\mu}(\mathbf{X})|\psi\rangle \tag{37}$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet S eine beliebige Hyperfläche und

$$t^{\lambda\mu}(\mathbf{X}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\lambda}\Phi)}\partial^{\mu}\Phi - \delta^{\lambda\mu}\mathcal{L} \tag{38}$$

den Energie-Impuls-Tensor mit der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$. Diese ist analog zur klassischen Mechanik definiert (vgl. [26]). Da $\partial_{\lambda}t^{\lambda\mu} = 0$ gilt, ist (37) unabhängig von der Wahl der Hyperfläche S und definiert deshalb ein konstantes Vektorfeld auf dem Minkowski-Raum $\mathfrak{M}$ (siehe für einen Beweis [22]).
Im Fall von Diracteilchen berechnet man den Energie-Impuls-Tensor (nach [22]) wie folgt:

$$t^{\lambda\mu}(\mathbf{X}) = \frac{i}{2}:\left(\tilde{\Phi}\gamma^{\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{\lambda}} - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_{\lambda}}\gamma^{\mu}\Phi\right): \tag{39}$$

Und im Fall von Bosonen lautet dieser (vgl. [27]):

$$t^{\lambda\mu} = :\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\bar{\Phi}^{\lambda_i}\Phi^{\mu_i} + \Phi^{\lambda_i}\bar{\Phi}^{\mu_i} - g^{\lambda\mu}\left(\Phi^{\upsilon_i}\Phi_{\upsilon_i} - m_i^2\Phi\bar{\Phi}\right)\right): \tag{40}$$

Aufgrund der Tatsache, dass (37) für beliebige Systeme[16] licht- oder zeitartig ist, zeigt (37) eine Möglichkeit, eine Blätterung für allgemeine Systeme in Abhängigkeit von ihrer Wellenfunktion zu konstruieren. Mithilfe einer solchen raumartigen Blätterung sind die Entwicklungen der Teilchenbahnen oder Feldkonfigurationen durch Gleichung (28) bzw. (32) auch bei einer verschränkten Wellenfunktion eindeutig und unabhängig vom Bezugssystem definiert. Zu erwähnen ist bei (37) außerdem, dass dieses Vektorfeld genau dann lichtartig ist, wenn es sich um masselose Teilchen handelt. Dies stellt allerdings meiner Meinung nach kein konzeptuelles Problem dar, da sich masselose Teilchen bekanntlich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Eine wichtige Gemeinsamkeit aller bisher vorgestellten Möglichkeiten für die Konstruktion einer Blätterung der Raumzeit ist, dass es prinzipiell möglich ist, dass für Diracteilchen aufgrund des Quantengleichgewichts (29) auf einer Hyperfläche die statistischen Vorhersagen der so konstruierten Hypersurface-

[16] Ausgenommen sind lorentzinvariante Grundzustände, da (37) in diesen Spezialfällen gleich 0 ist.

Bohm-Dirac-Modelle mit denen der Quantenfeldtheorie und allen bisherigen Experimenten übereinstimmen. Dazu müssten die Hypersurface-Bohm-Dirac-Modelle natürlich noch insofern weiterentwickelt werden, dass sie Wechselwirkungen zwischen Teilchen einbeziehen, da sonst keine Beschreibung von Messvorgängen möglich ist. Entsprechendes gilt auch für Bosonen. [1]
Eine weitere Möglichkeit, um eine Blätterung zu konstruieren, besteht darin, nicht, wie oben beschrieben, die Wellenfunktion als Ausgangspunkt zu nehmen, sondern die Teilchenbahnen bzw. die Feldkonfigurationen. Diese Betrachtung ist dadurch motiviert, dass in der nicht-relativistischen Bohmschen Mechanik die Teilchen bzw. die Felder real sind (vgl. Abschnitt 2.1). Zur Konstruktion einer Blätterung anhand von Teilchenbahnen bzw. Feldkonfigurationen kann z.B. bei spinlosen Bosonenfeldern ihr Energie-Impuls-Tensor (40) verwendet werden (vgl. [28]). Allerdings haben solche Konstruktionen den Nachteil, dass aufgrund der starken Abhängigkeit der Blätterung von den Anfangsorten bzw. Anfangskonfigurationen nicht sichergestellt werden kann, dass das Quantengleichgewicht auf irgendeiner Hyperfläche erfüllt ist. Deshalb ist auch zweifelhaft, ob diese Modelle mit den Ergebnissen der Experimente übereinstimmen (vgl. [1]).

4.4. Modelle ohne Blätterung

Da eine Blätterung der Raumzeit trotz der verschiedenen lorentzinvarianten Konstruktionen, die im vorigen Abschnitt beschrieben wurden, in gewissem Sinn eine zusätzliche nicht messbare Struktur der Raumzeit darstellt, existieren Ansätze, die konzeptuellen Schwierigkeiten einer relativistischen Formulierung der Bohmschen Mechanik ohne jegliche Blätterung zu lösen. Wie oben erläutert ist die Blätterung im Wesentlichen nur eine Hilfsstruktur, um die Teilchenbahnen bzw. Feldkonfigurationen eindeutig zu beschreiben, obwohl es in der Relativitätstheorie keine absolute Zeit gibt.
Dewdney und Horton entwickelten in [27] und [29] ein Modell, in dem anstatt einer Blätterung der relativistische Lichtkegel für diesen Zweck verwendet wird. Dabei wird erst der relativistische Energie-Impuls bzw. die Geschwindigkeit in einem beliebigen Bezugssystem durch die Eigenvektoren des Ener-

gie-Impuls-Tensors (38) bestimmt. Dann werden mithilfe der Eigenzeit bzw. des Zukunftslichtkegels der einzelnen Teilchen die lorentzinvarianten Bahnen iterativ berechnet. Dieses Verfahren bezieht, wie auch die Folgenden, zwar die Nichtlokalität der Quantenphysik ein, ist aber nicht statistisch transparent, d.h., es ist nicht (kaum) möglich, irgendwelche statistischen Vorhersagen zu bekommen, die mit der Quantenfeldtheorie oder mit Experimenten verglichen werden könnten, da unklar ist, inwiefern eine Art Quantengleichgewichtshypothese in diesen Fällen etabliert werden könnte. Ein guter Überblick über solche Modelle findet sich u.a. in [30].

Eine weitere Möglichkeit, eindeutige Teilchenbahnen ohne Blätterung zu konstruieren, ist, dass man die Koordinatensysteme der Teilchen synchronisiert. Das bedeutet nichts anderes, als dass man die Zeitkoordinaten der Teilchen durch einen gemeinsamen Parameter ausdrückt. Bezüglich dieses ist dann die Anwendung des jeweiligen Führungsgesetzes möglich (vgl. u.a. [24,31]).

Eine andere Möglichkeit, einen Begriff von Gleichzeitigkeit zu definieren, besteht darin, dass mithilfe eines beliebigen zeitartigen Einheitsvektorfeldes n eine raumartige Hyperfläche $\Sigma_{\mathbf{X}}$ durch den Raumzeitpunkt $\mathbf{X}$ konstruiert wird. Eine solche Hyperfläche wird z.B. durch folgende Gleichungen, die Kurven in der Raumzeit beschreiben, bestimmt:

$$\frac{dx^{\lambda}}{ds} = u^{\lambda} \qquad \frac{du^{\lambda}}{ds} = -n^{\lambda}u^{\mu}u^{\upsilon}\partial_{\upsilon}n_{\mu} \tag{41}$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}$ und $u(0) \cdot n(\mathbf{X}(0)) = 0$.

(41) bewirkt, dass u immer orthogonal zu n ist. Die so definierten Hyperflächen bilden im Allgemeinen aber keine Blätterung, da ein Punkt auf mehreren Hyperflächen liegen kann. Nur wenn n integrabel ist, ist diese Konstruktion eine weitere Möglichkeit, eine Blätterung zu definieren. Wenn n nicht integrabel ist, bleibt (wie in den beiden vorigen Modellen ohne Blätterung) unklar, inwieweit sich die statistischen Vorhersagen der Quantenfeldtheorie mit denen der Modelle vereinbaren lassen. (vgl. [1])

Ein bedenkenswertes Argument, warum die fehlende statistische Transparenz nicht zwangsläufig ein Nachteil des jeweiligen Modells ist, stammt von

Nikolić [31], nämlich dass diese Modelle u.U. Vorhersagen zu Experimenten machen können, zu denen die Quantenfeldtheorie keine Vorhersage machen kann. Dieses Argument ist allerdings nur dann sinnvoll, wenn die Modelle alle bisherigen Experimente erklären könnten. Dies ist aber gerade wegen der fehlenden statistischen Transparenz kaum möglich zu zeigen.

5. Fazit und Ausblick

Bohmsche Mechanik vermeidet die konzeptuellen Probleme der konventionellen Quantenmechanik (insbesondere das sogenannte Messproblem) durch eine klare Ontologie. Ein häufiges Argument gegen Bohmsche Mechanik ist, dass sie aufgrund ihrer deutlichen Nichtlokalität nicht auf fundamentaler Ebene mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar ist. Allerdings gibt es, wie in dieser Arbeit erläutert, eine Reihe von Ansätzen, die eine lorentzinvariante Darstellung der Bohmschen Mechanik ermöglichen. Einige dieser Modelle führen eine Blätterung der Raumzeit in raumartige Hyperflächen ein, wodurch sie sowohl eine eindeutige Definition der Entwicklung der ontologischen Objekte als auch im Prinzip (sofern eine Weiterentwicklung auf wechselwirkende System möglich ist) korrekte Vorhersagen bezüglich quantenphysikalischer sowie speziell relativitätsphysikalischer Experimente ermöglichen. Die Blätterung kann entweder durch ein lorentzinvariantes Gesetz als zusätzliches Objekt beschrieben oder mithilfe eines kovarianten Vektorfeldes direkt von der Wellenfunktion abgeleitet werden. Insbesondere zeigt diese zweite Möglichkeit, dass die Blätterung kein prinzipiell neues Objekt einer relativistischen Bohmschen Mechanik darstellt, sondern im Wesentlichen in jeder Quantentheorie vorhanden ist. Des Weiteren existieren Ansätze einer relativistischen Formulierung der Bohmschen Mechanik ohne Blätterung, die deutlich machen, dass Nichtlokalität auch auf der Ebene der ontologischen Objekte mit der Forderung nach Lorentzinvarianz vereinbar ist. Diese Modelle haben allerdings den Nachteil, dass sie nicht statistisch transparent sind.

Die hier beschriebenen Argumente lassen den Schluss zu, dass alle prinzipiellen Probleme für eine lorentzinvariante Formulierung der Bohmschen Mechanik gelöst sind, wenngleich selbstverständlich noch zahlreiche technische Probleme bestehen, insbesondere in Bezug auf die Einbeziehung von Wechselwirkungen. Anzumerken ist noch, dass ebenfalls Modelle für eine Verallgemeinerung der Bohmschen Mechanik auf Systeme mit variabler Teilchenzahl existieren (vgl. [32,33]). Da aber unklar ist, welche Bedingungen neben Lorentzinvarianz eine relativistische Theorie ausmachen (vgl. [17,34]), ist es mir nicht möglich, die im Titel formulierte Frage zufriedenstellend zu beantworten. Folgendes aber kann man festhalten: Da alle Quantentheorien auf der Wellenfunktion beruhen und außerdem, wie Bell in [6] zeigte, nichtlokal sein müssen, ist bei der Frage inwieweit es möglich ist, die Bohmsche Mechanik relativistisch zu formulieren, die Wahl der Quantentheorie nicht von großer Bedeutung. Zwar ist die relativistische Formulierung bei anderen Quantentheorien schon deutlich fortgeschrittener, ich sehe aber keine prinzipiellen Unlösbarkeiten, auch die Bohmsche Mechanik im gleichen Sinn relativistisch zu formulieren.

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Professor Dürr für seine wirklich außergewöhnliche Unterstützung vor und während dieser Arbeit bedanken.
Des Weiteren gilt mein Dank meinen Eltern sowie meinen persönlichen Assistenten Srećko Cernić, Anna Docter, Pascal Hemala, Harald Hermann, Annette Hildebrand, Kore Linnerud, Patrick Schwaferts, Johannes Speck, Florian Wetter und Matthias Wright, ohne deren Hilfe ich aufgrund meiner körperlichen Behinderung diese Arbeit nie hätte schreiben können.

Literaturverzeichnis

[1] D. Dürr, S. Goldstein, T. Norsen, W. Struyve und N. Zanghì, „Can Bohmian mechanics be made relativistic?“, *Proceedings of the Royal Society A 470, 20130699*, 2014 und arXiv:1307.1714v2.

[2] P.A. Schilpp, *Albert Einstein, philosopher-scientist*, MJF Books, New York 1970.

[3] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Pearson Education, San Francisco 2011.

[4] L.D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics, vol. 3: Quantum mechanics non-relativistic theory*, Pergamon Press, 1991 (1977), translated by J.B. Sykes and J. S. Bell.

[5] E. Schrödinger, „Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik“, *Die Naturwissenschaften, Heft 48,* pp. 807-812, 29. November 1935.

[6] J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.

[7] D. Dürr und S. Teufel, *Bohmian Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2009.

[8] D. Bohm, „A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of ‘Hidden’ Variables I“, *Physical Review,* pp. 166-179, 15 January 1952.

[9] D. Bohm, „A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of ‘Hidden’ Variables II“, *Physical Review,* pp. 180-193, 15 January 1952.

[10] D. Dürr, *Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001.

[11] D. Dürr, S. Goldstein und N. Zanghì, *Quantum Physics without Quantum Philosophy*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2013.

[12] W. Struyve, „Pilot-wave theory and quantum fields“, *Reports on Progress in Physics 73,106001,* 2010 und arXiv:0707.3685v4.

[13] D. Dürr, S. Goldstein und N. Zanghì, „Quantum Equilibrium and the Origin of Absolute Uncertainty“, *Journal of Statistical Physics 67,* pp. 843-

907, 1992.

[14] A. Aspect, J. Dalibard und G. Roger, „Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers“, *Physical Review Letters,* pp. 1804-1807, 25 December 1982.

[15] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Physical Review,* pp. 777-780, 15 May 1935.

[16] D. Bohm und Y. Aharonov, „Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky“, *Physical Review*, vol. 108, pp. 1070-1076, 1957.

[17] T. Maudlin, *Quantum Non-Locality and Relativity*, Third edition, Wiley-Blackwell 2011.

[18] A. Einstein, *Grundzüge der Relativitätstheorie*, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2009, unter dem gleichen Titel ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1956.

[19] W. Nolting, *Grundkurs theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, 8. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2011.

[20] B. F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1980.

[21] E. Rebhan, *Theoretische Physik: Relativistische Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie und Elementarteilchentheorie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.

[22] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Row, Peterson and Company, Evanston Illinois, Elmsford New York 1961.

[23] D. Dürr, S. Goldstein, K. Münch-Berndl und N. Zanghì, „Hypersurface Bohm-Dirac models“, *Physical Review A60 ,* pp. 2729-2736, 1999 und arXiv:quant-ph/9801070v2, wiederveröffentlicht in [11].

[24] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein und N. Zanghì, „EPR-Bell Nonlocality, Lorentz Invariance, and Bohmian Quantum Theory“, *Physical Review,*

A53, pp. 2062-2073, 1996 und arXiv:quant-ph/9510027v1.

[25] D. Bohm and B.J. Hiley, *The undivided Universe*, Routledge, London, New York 1993.

[26] N. Straumann, *Relativistische Quantentheorie, eine Einführung in die Quantenfeldtheorie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2005.

[27] G. Horton und C. Dewdney, „A non-local, Lorentz-invariant, hidden-variable interpretation of relativistic quantum mechanics based on particle trajectories“, *Journal of Physics A: 34, 46,* 2001 und arXiv:quant-ph/0110007v1.

[28] G. Horton und C. Dewdney, „A relativistically covariant version of Bohm's quantum field theory for the scalar field“, *Journal of Physics A37,* pp. 11935-11944, 2004 und arXiv:quant-ph/0407089v2.

[29] C. Dewdney und G. Horton, „Relativistically invariant extension of the Broglie-Bohm theory of quantum mechanics“, *Journal of Physics A: 35,* pp. 10117-10127, 2002 und arXiv:quant-ph/0202104v2.

[30] R. Tumulka, „The ‘Unromantic Pictures’ of Quantum Theory“, *Journal of Physics A40,* pp. 3245-3273, 2007 und arXiv:quant-ph/0607124v1.

[31] H. Nikolic, „Relativistic quantum mechanics and the Bohmian interpretation“, *Foundations of Physics Letters 18,* pp. 549-561, 2005 und arXiv:quant-ph/0406173v2.

[32] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka und N. Zanghì, „Bell-Type Quantum Field Theories“, *Journal of Physics A: Mathematical and General 38, R1-R43.,* 2005 und arXiv:quant-ph/0407116v1.

[33] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka und N. Zanghì, „Bohmian Mechanics and Quantum Field Theory“, *Physical Review Letter 93 090402,* 2004 und arXiv:quant-ph/0303156v2, wiederveröffentlicht in [11].

[34] F. Hänle, *Möglichkeit einer realistischen, relativistischen Quantenmechanik,* Bachelorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2013.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe.

München, den 03.02.2014,

Aaron Schaal