

# Zur Begründung des Bornschen statistischen Gesetzes

Bachelorarbeit  
an der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Johannes Nissen-Meyer

am 8. Juni 2009

Betreuer: Prof. Dr. D. Dürr



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Zufall, Wahrscheinlichkeit und Typisch</b>	<b>6</b>
2.1	Zufall . . . . .	6
2.2	Typisch . . . . .	7
2.2.1	Maße und Integrale . . . . .	7
2.2.2	Beispiele . . . . .	9
2.3	Das Gesetz der großen Zahlen . . . . .	12
2.4	Wahrscheinlichkeiten . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Bohmsche Mechanik</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Das Bornsche statistische Gesetz</b>	<b>19</b>
4.1	Das richtige Maß . . . . .	19
4.2	Wellenfunktion von Subsystemen . . . . .	22
4.2.1	Bedingte Wellenfunktion . . . . .	23
4.2.2	Effektive Wellenfunktion . . . . .	25
4.3	Typische Empirische Verteilung . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>30</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>31</b>
A.1	Beweis von Satz 1 . . . . .	31
A.2	Zur Maßdichte und Kontinuitätsgleichung . . . . .	32

# 1 Einleitung

Die Quantenmechanik ist eine Theorie, deren Vorhersagen in den Experimenten glänzende Bestätigung finden. Die Grundlage all der quantenmechanischen Vorhersagen ist das Bornsche statistische Gesetz oder auch Bornsche Regel. Diese besagt, dass die Verteilung der Teilchenorte  $|\psi|^2$  beträgt wenn das System die Wellenfunktion  $\psi$  besitzt, und nach Bell sind die Ortsvariablen die einzigen fundamentalen Größen der Physik, welche eine Theorie vorhersagen muss:

Recognizing that it is always positions that we are in the end concerned with....([2], S.166)

...in physics the only observations we must consider are position observations, if only positions of instrument pointers.([2], S.166)

Die Bornsche Regel stellt in der Quantenmechanik ein Axiom dar. Es ist nicht möglich, dieses Gesetz im Rahmen der Quantenmechanik abzuleiten. In dieser Bachelorarbeit werde ich zeigen, wie die Begründung des Bornschen statistischen Gesetzes funktioniert, wenn man eine andere Mechanik zugrunde legt. Diese Mechanik nennt sich Bohmsche Mechanik und ist im Gegensatz zur Quantenmechanik eine rein deterministische Theorie. Sie ist eine nicht-relativistische Theorie, welche die selben Ergebnisse hervorbringt wie die nicht-relativistische Quantenmechanik. Insbesondere soll so auch gezeigt werden, dass der Formalismus der Quantenmechanik überstrapaziert wird wenn man aus ihm folgert, dass die Natur in ihrer grundlegenden Struktur zufällig sein *muss*. In der Tat trifft die Quantenmechanik nur Wahrscheinlichkeitsaussagen und scheint somit einen intrinsischen Zufall zu implizieren. Die Quantenmechanik macht aber in keinsten Weise Aussagen über die zugrunde liegende Struktur der Natur. Mit ihr kann man den Ausgang vieler verschiedener Experimente vorhersagen, aber auch nicht mehr. Alle weiteren Schlussfolgerungen, die aus der Quantenmechanik gezogen werden, sind spekulativ und nicht durch Fakten zu begründen. Diese Arbeit soll zeigen wie der quantenmechanische Zufall in einer rein deterministischen Theorie - der Bohmschen Mechanik - begründet und erklärt werden kann.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Konzepte und Werkzeuge, die ganz allgemein für eine statistische Analyse von Nöten sind, bereitgestellt. Im wesentlichen wird es darum gehen, was *typisch* und *typisches* Verhalten von Systemen bedeutet. Ausserdem wird erklärt, wie Wahrscheinlichkeiten und Zufall in dieser Sichtweise zu verstehen sind. In Kapitel 3 wird kurz die Bohmsche Mechanik eingeführt und vorgestellt, ohne tiefer auf die Begründung der Gleichungen einzugehen. Kapitel 4 behandelt die eigentliche Herleitung des Bornschen statistischen Gesetzes, welches sich aus der in Kapitel 2 erläuterten, statistischen Analyse der Bomschen Mechanik ergeben wird.

Die wissenschaftliche Grundlage dieser Bachelorarbeit ist die Arbeit von Dürr, Goldstein und Zanghi [3].

## 2 Zufall, Wahrscheinlichkeit und Typisch

Diese Kapitel behandelt die statistische Analyse, welche für die Herleitung in Kapitel 4 benötigt wird. Diese ist prinzipieller Art und zunächst unabhängig von der zugrunde liegenden Mechanik. Anhand einiger Beispiele wird die Vorgehensweise dargestellt. Die nötigen mathematischen Werkzeuge für die Analyse sind Maße und das Gesetz der großen Zahlen.

### 2.1 Zufall

Unter Zufall wird gemeinhin etwas überraschendes oder unvorhersehbares verstanden. Mit anderen Worten, Zufall wird oft als Unwissenheit, als ein Mangel an Informationen interpretiert. Eine Reihe von Münzwürfen erscheint uns zufällig. Man könnte sich aber eine Maschine vorstellen, die ein ganz ähnliches Muster an Nullen und Einsen erzeugt ( $0 \hat{=}$  Kopf,  $1 \hat{=}$  Zahl). Ein Beobachter würde diese Zahlenfolge vermutlich als zufällig betrachten. Sobald er aber den Mechanismus der Maschine genau kennt, kann er die Zahlenfolge nachvollziehen. Er würde sie nicht mehr als zufällige Zahlenfolge interpretieren. Die Folge selbst hat sich dabei aber nicht geändert. Man könnte sich nun diese Maschine beliebig kompliziert vorstellen, so kompliziert, dass niemand sie durchschauen könnte. Wäre die Zahlenfolge dann zufällig oder nicht? Kurzum, Zufall als Synonym für Unwissenheit ist extrem subjektiv. Das Verhalten eines physikalischen Systems ist aber ganz und gar nicht subjektiv. Daher könnte man alternativ dazu die Vorgänge in einem System als zufällig betrachten wenn sich aus der bloßen Beobachtung des Systems keine Gesetzmäßigkeit, d.h. Vorhersage für die Zukunft ableiten ließe. Die obige Abfolge von Nullen und Einsen würde in diesem Sinne als zufällig angesehen werden, wenn aus der Kenntnis von beliebig vielen Ziffern keinerlei Vorhersage über die nächste Ziffer getroffen werden kann. Ein solche Zahlenfolge würde als zufällig interpretiert werden, ob sie nun von einem deterministischen Generator erzeugt worden wäre oder durch irgendetwas anderes.<sup>1</sup>

Marian von Smoluchowski stellte folgende Frage([6]):

Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf regelmäßige Naturgesetze zurückzuführen ist? Oder mit anderen Worten: Wie können gesetzmäßige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

Eine deterministische Naturbeschreibung widerspricht der Existenz von Zufall ihm obigem Sinne keineswegs. Es bleibt aber trotzdem die Frage zu klären, warum sich gewisse Systeme zufällig verhalten. Warum ist die Welt nicht so beschaffen, dass bei einem Münzwurf immer Kopf geworfen wird?

---

<sup>1</sup>Was immer dies auch sein mag

In einem deterministischem Universum ist es denkbar, die Anfangsbedingung so zu wählen, dass bei einem Münzwurf immer Kopf kommt. Die Antwort auf diese Frage liegt in dem *typischen* Verhalten von Systemen. Am Ende von Abschnitt 2.3 wird sie noch einmal aufgegriffen werden.

## 2.2 Typisch

Zu verstehen, was typisch bedeutet, ist nicht weiter schwer. In einer Reihe von vielen Münzwürfen wird typischerweise etwa gleich oft Zahl wie Kopf vorkommen. Warum ist dies so? Weil es viel mehr Möglichkeiten gibt, Zahl und Kopf etwa gleich auf  $N$  Würfe zu verteilen, als dies der Fall bei einem großen Ungleichgewicht zugunsten von Kopf oder Zahl ist. Bei einer Lotterziehung wird man typischerweise nichts gewinnen, da es viel mehr Zahlenkombinationen gibt, die leer ausgehen, als umgekehrt. Ein System ist also in einem typischen Zustand, wenn fast alle Anfangsbedingungen zu diesem Zustand führen. Dies ist der Grund warum die Luft makroskopisch homogen verteilt ist und wir nicht plötzlich in einem Vakuum sitzen. Die Zahl der Realisierungsmöglichkeiten für einen Zustand makroskopisch homogener Dichte ist „viel größer“ als die für einen Zustand inhomogener Dichte. Im Fall der Gase tritt aber ein mathematisches Problem auf. Der mikroskopische Zustand eines Gases wird durch einen Punkt im Phasenraum beschrieben. Zu *jedem* Makrozustand gehören damit überabzählbar viele Mikrozustände. Ein Zustand der homogenen Dichte wird durch unendlich viele Mikrozustände realisiert, genauso wie ein Zustand inhomogener Dichte. Wir können also nicht mehr die einzelnen Zustände abzählen und dann entscheiden was viel und was wenig, also typisch und untypisch ist. Um dieses Problem zu lösen greift man auf Maße zurück.

### 2.2.1 Maße und Integrale

Ganz allgemein ist ein Maß eine Abbildung  $\mathbb{P}$ , welche einer Menge eine Zahl zuordnet<sup>2</sup>. Ein wichtiger Spezialfall ist das Lebesgue-Maß  $\lambda$ . Das Lebesgue-Maß ist die Verallgemeinerung des üblichen Volumenbegriffes auf den  $\mathbb{R}^d$ , z.B. im  $\mathbb{R}^1$  die gewöhnliche Länge oder im  $\mathbb{R}^2$  der Flächeninhalt.

Es stellt sich die Frage, ob alle Mengen (Lebesgue-) messbar sind, man ihnen also ein Maß zuordnen kann. Dies ist nicht der Fall. Man kann Mengen konstruieren, welche nicht messbar sind. Es ist also notwendig eine Menge  $\mathcal{B}^d(\mathbb{R}^d)$  einzuführen, die alle messbaren Mengen des  $\mathbb{R}^d$  enthält. Diese Menge heißt Borel-Algebra und ist eine  $\sigma$ -Algebra. Das Tripel  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$  nennt man dann Lebesgue-Borelschen Maßraum. Für eine beliebige Menge  $\Omega$  mit der  $\sigma$ -Algebra  $\Sigma$  und dem Maß  $\mathbb{P}$  auf  $\Sigma$ , heißt das Tripel  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  entsprechend einfach Maßraum.

---

<sup>2</sup>Dies kann natürlich verallgemeinert werden auf Komplexe Zahlen, Projektorwertige Maße etc., ist aber für diese Arbeit uninteressant

Der Begriff des Maßes lässt eine allgemeine Definition des Integralbegriffes bezüglich eines Maßes zu. Zuerst soll nur das Lebesgue-Integral einer Funktion  $f$  betrachtet werden. Dieses wird wie folgt konstruiert. Seien die  $f_n$  *elementare Funktionen*. Elementare Funktionen nehmen nur endliche viele Werte an und sind daher darstellbar als:

$$f_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

mit der charakteristischen Funktion  $\chi_{A_i}$  der Menge  $A_i$ . Das Integral einer elementaren Funktion ist dann mit

$$\lambda(A) = \int_A d\lambda = \int \chi_A d\lambda,$$

definiert als

$$\int f_n d\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(A_i).$$

Jede beschränkt messbare Funktion kann durch elementare Funktionen beliebig genau approximiert werden. Das Integral einer nicht-negativen messbaren Funktion ist dann definiert durch

$$\int f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda$$

Beliebige messbare Funktionen unterteilt man nun in positiv und negativ Teil  $f = f_+ - f_-$  und nutzt die Linearität obiger Definition des Integrals aus.

Bei dem Lebesgue-Integral startet man mit einer Unterteilung des Wertebereichs einer Funktion und ordnet den Werten ihre Urbilder  $A_i$  zu. Dies ist der wesentliche Unterschied zum Riemann-Integral, bei dem der Definitionsbereich unterteilt wird. Ein Resultat dieses anderen Ansatzes sind einige, aus mathematischer Sicht, sehr schöne Konvergenzsätze (siehe [1], Kapitel 1 und 2).

Mit der Einführung des Lebesgue-Integrals können wir nun beliebige Maße  $\mathbb{P}$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  über ihre Dichte  $\rho$  definieren. Es gilt dann

$$\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P} = \int_A \rho d\lambda = \int \chi_A \rho d\lambda.$$

Wenn nun die Mengen des Raumes zeitabhängig sind, also ein Fluss  $\Phi_t$  mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$\Phi_t(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \Phi_s \circ \Phi_t(\mathbf{x}) = \Phi_{s+t}(\mathbf{x}), \Phi_{t=0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

so ergibt sich auf natürliche Weise die zeitliche Entwicklung des Maßes zu

$$\mathbb{P}_t(A) := \mathbb{P}(\Phi_{-t}(A)).$$



Ändert sich das Maß unter dem Fluss nicht, so gilt

$$\mathbb{P}_t(A) = \mathbb{P}(A).$$

Diese Eigenschaft eines Maßes nennt man *Stationarität*.

Mithilfe des eingeführten Maßbegriffes sollen nun Systeme mit überabzählbar vielen Elementen auf ihr Verhalten hin untersucht werden.

### 2.2.2 Beispiele

Folgende zwei Beispiele sollen weiter verdeutlichen was typisch bedeutet. Das erste Beispiel ist rein mathematischer Art (nach [4], S.59), während das zweite das klassische Gas<sup>3</sup> von vorher wieder aufgreift.

Betrachten wir das Intervall  $[0; 1]$  in der Dualzahldarstellung. Was ist hier eine typische Zahl, also welche Zahlen kommen „überwältigend“ häufig vor und welche kaum? Intuitiv wird man zu dem Schluss kommen, dass die meisten Zahlen eine irreguläre Abfolge von Nullen und Einsen sind. Irregulär bedeutet, dass es keine Möglichkeit gibt aus einer beliebig langen Abfolge von Ziffern auf die nächste zu schließen. Ausserdem werden vermutlich die Nullen und Einsen in etwa gleich oft vorkommen (sogenannte *normale Zahlen*). Zahlen wie  $\frac{1}{2} = 0.10000\dots$  oder allgemein der Form  $\frac{1}{2^n}$  gehören offensichtlich nicht dazu. Von all diesen Zahlen gibt es unendlich viele, so dass ein Abzählen und anschließendes Vergleichen der Mengen nicht funktioniert. Die Lösung für dieses Problem stellen die zuvor eingeführten Maße dar. Das Lebesgue- Maß auf dem Intervall ist einfach  $\lambda([0; 1]) = 1$ . Man kann nun mit dem sogenannten starken Gesetz der großen Zahlen zeigen, dass das Maß auf den normalen Zahlen ebenfalls gleich Eins ist ([4], S. 104-105)<sup>4</sup>. Das bedeutet, dass, bis auf einzelne Punkte, die gesamte Länge des Intervalls mit normalen Zahlen ausgefüllt ist. Man stelle sich nun folgendes Gedankenexperiment vor. Es gebe einen Zeiger der kontinuierlich das Intervall  $[0; 1]$  durchläuft. Zu einer Zeit  $t$  stoppt er und zeigt die entsprechende Zahl an. Da die normalen Zahlen die gesamte Länge des Intervalls ausmachen wird sich der Zeiger immer in Bereichen befinden, die zu den normalen Zahlen gehören. Stoppt er, wird er in den allermeisten Fällen, also typischerweise, eine normale Zahl anzeigen. Dieses Beispiel lässt folgende Definition sinnvoll erscheinen.

**Definition.** Sei  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  ein Maßraum mit der  $\sigma$ -Algebra  $\Sigma$  auf  $\Omega$  und dem Maß  $\mathbb{P}$ . Sei  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ . Gilt für ein  $A \in \Sigma$  dass  $\mathbb{P}(A) \approx 1$ , dann heißen die Elemente  $\omega$  von  $A$  typisch.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass typische Elemente stellenweise untypisch aussehen können. Im Fall der normalen Zahlen heißt das, dass jede

---

<sup>3</sup>D.h. wir legen die Hamiltonsche Mechanik zugrunde

<sup>4</sup>Alle anderen Zahlen sind nur einzelne Punkte welche die Länge Null haben

beliebig lange Abfolge von Nullen auch irgendwann einmal vorkommt. Solche Stellen mögen untypisch aussehen, kommen aber sicher vor. Im Gegensatz zu untypischen Zahlen sind diese Abfolgen jedoch nicht unendlich lang und mitteln sich durch eine ebenso lange Abfolge von Einsen wieder heraus.

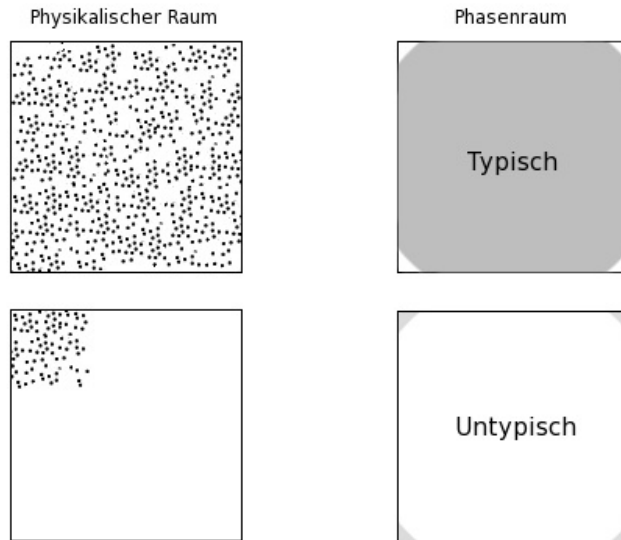
Im nächsten Beispiel soll das typische Verhalten eines Gases studiert werden. Der Zustand eines Gases mit  $N$  identischen Teilchen ist durch die Position und Geschwindigkeit aller Teilchen festgelegt. Dieser Mikrozustand wird durch einen Punkt im  $6N$ -dimensionalen Phasenraum  $\Omega$  repräsentiert. Aufgrund der Komplexität des Vielteilchensystems bleibt uns dieser Zustand verborgen. Was wir beobachten, sind die makroskopischen Auswirkungen, den sogenannten Makrozustand. Um zu sehen, welche Mikrozustände typisch sind, benötigt man ein Maß auf  $\Omega$ , welches uns sagt, was viel und was wenig ist. Wie soll diese Maß aussehen? Es wäre willkürlich einfach irgendeines zu nehmen. Es muss in irgendeiner Weise ausgezeichnet sein. Das naheliegendste ist, dass es uns Typisch zeitunabhängig definiert. Aus der statistischen Mechanik ist bekannt, dass sich das Phasenraumvolumen einer Menge mit der Zeit nicht ändert. Die physikalischen Gesetze liefern uns also ein Maß, das auf Zeitunabhängigkeit basiert.

It is as reasonable to take that notion [of time-independent typicality] as relevant for our understanding of the universe as the law itself. ([4], S. 65)

Fordert man ausserdem die Zeitunabhängigkeit nicht, so stößt man auf das Problem, keine empirisch überprüfbaren Aussagen herleiten zu können. Man könnte z.B. ein Maß konstruieren mit dem sich zeigen läßt, dass Steine typischerweise fliegen. Da typisch aber zeitabhängig definiert wurde, könnte das selbe Verhalten im nächsten Moment untypisch sein und deshalb beobachten wir es auch nicht. Definiert man typisch zeitabhängig, ist man nicht mehr in der Lage, überprüfbare Aussagen ableiten zu können, was mit Physik nichts mehr zu tun hat. Zudem würde das Konzept des Typischen seine Bedeutung verlieren, wenn sich das typische Verhalten dauernd ändern würde. Die Forderung nach Zeitunabhängigkeit ist also nicht nur naheliegend, sondern zwingend notwendig, um überprüfbare Aussagen zu beweisen.

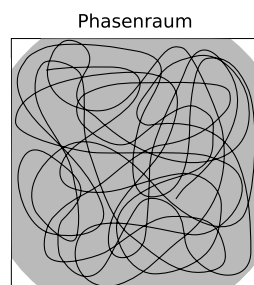
Wie schon erwähnt, folgt aus dem Liouvillschen Theorem der statistischen Mechanik, dass das Phasenraumvolumen stationär ist. Damit ist klar, was typisch ist und was nicht. Typisch sind jene Makrozustände, deren Mikrozustände ein großes Phasenraumvolumen einnehmen. Intuitiv mag es einleuchtend sein, dass in einem größerem Phasenraum Volumen „mehr“ Zustände sitzen, doch weder ist dies klar noch sollte man diese Erklärung zu ernst nehmen.

Die Rechnung sei an dieser Stelle nicht geliefert, doch es wird nicht überraschen, dass das Phasenraumvolumen, dessen Mikrozustände einem makroskopischen Zustand homogener Dichte entsprechen, extrem groß ist.



**Abbildung 1:** Typische Zustände entsprechen großen Phasenraumvolumina der zugehörigen Mikrozustände. Die Größenordnung ist rein skizzenhaft.

Ein Phasenraumpunkt wird typischerweise keine besondere Vorzugsrichtung aufweisen. Er wird den Phasenraum nach einiger Zeit in etwa gleichmäßig durchwandert haben.



Da aber der allergrößte Teil des Phasenraums zu einem Makrozustand homogener Dichte gehört, wird das Gas die allermeiste Zeit in einem Zustand homogener Dichte sein. Genau das beobachten wir. Natürlich können Fluktuationen auftreten, sie treten sogar sicher auf. Aber je stärker diese Fluktuationen sind, umso seltener treten sie auf (man denke an das Beispiel der Zahlen in Dualdarstellung). Wenn man also nur lang genug wartet, wird man auch eine extreme Fluktuation beobachten. Nur ist diese Zeit aberwitzig lang, um ein Vielfaches länger als das Universum alt ist.

Der Nicht-Gleichgewichtsfall ist völlig analog zu erklären. Ein Gas, das durch einen Kolben auf ein kleines Volumen komprimiert wurde, befindet sich in einem untypischen Zustand wenn der Kolben entfernt wird. Das Phasenraumvolumen, in dem sich der aktuelle Phasenraumpunkt befinden kann, ist also verschwindend klein. Der typische Phasenraumpunkt dieses Volumens wird, wie vorher, keine gerichtete Bewegung durch den Phasenraum vollziehen. Er wird den Phasenraum in etwa gleichmäßig durchwandern. Das Gas ist in den Gleichgewichtszustand übergegangen. Jedoch ist dieser Phasenraumpunkt immer noch untypisch. Das Phasenraumvolumen, zu dem er gehört, hat sich mit der Zeit nicht geändert und ist immer noch verschwindend gering. Lässt man z.B. die Zeit rückwärts laufen bzw. dreht die Geschwindigkeit aller Teilchen um, so wird das Gas sehr schnell in den untypischen Zustand zurücklaufen. Ein typischer Phasenraumpunkt wird dies nicht tun.

Ein System verhält sich also so, wie es *typisch* für dieses System ist. Damit ist gemeint: Die Menge der Anfangsbedingungen, für die sich das System anders verhält, ist verschwindend klein. Um eine konkrete Aussage zu treffen was typisch ist, muss man also zeigen für welche Menge das entsprechende Maß gegen Eins geht (bzw. dessen Komplement gegen Null). Dies geschieht mit dem *Gesetz der großen Zahlen*, welches im folgenden Abschnitt erläutert wird.

### 2.3 Das Gesetz der großen Zahlen

Das schwache Gesetz der großen Zahlen<sup>5</sup> ([4], S. 105-106) lautet:

**Satz 1.** Sei  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen. Sei  $\mathbb{E}(X_0^2) = \mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ . Dann gilt für jedes  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \mid \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(\omega) - \mathbb{E}(X_0) \right| > \epsilon \right\} \right) \leq \frac{\mathbb{V}(X_0)}{N\epsilon^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (2.1)$$

mit dem Erwartungswert  $\mathbb{E}(X_i) := \int X_i d\mathbb{P}(\omega)$

und der Varianz  $\mathbb{V}(X_i) := \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))^2) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2$

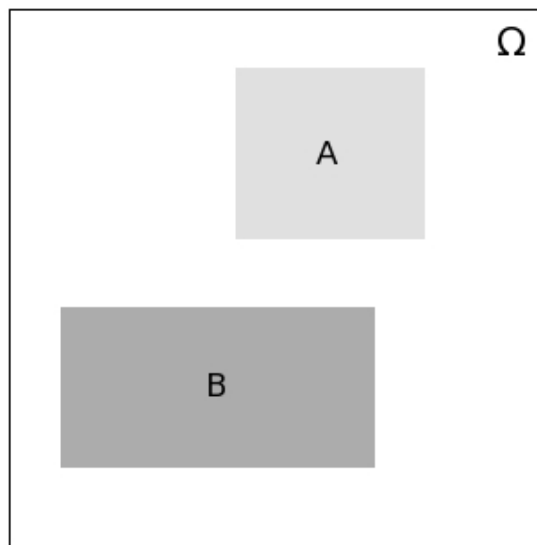
Der Beweis findet sich in Anhang A.1. Das Gesetz der großen Zahlen liefert eine Aussage über die Menge von Elementen deren empirische Verteilung  $\rho = \frac{1}{N} \sum X_k(\omega)$  um mehr als  $\epsilon$  von dem Erwartungswert abweicht. Für

---

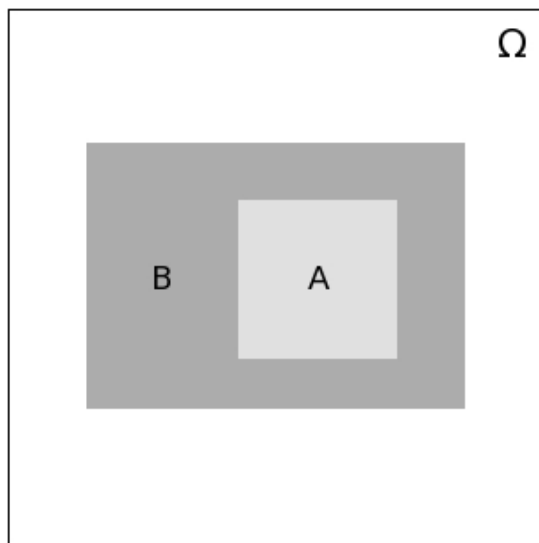
<sup>5</sup>Im folgenden einfach mit Gesetz der großen Zahlen bezeichnet

$N$  gegen unendlich verschwindet das Maß auf diese Menge. Das Maß  $\mathbb{P}$  einmal gegeben, kann man so zeigen welche Eigenschaften für ein Ensemble von Systemen typisch sind. Man muss ein Gesetz der großen Zahlen beweisen. Satz 1 ist relativ leicht herzuleiten, wenn die Voraussetzungen erst einmal gegeben sind. Was in der Tat sehr schwer, für viele physikalische Situationen praktisch unmöglich ist, ist die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen zu zeigen. Es wird sich herausstellen, dass die Bohmsche Mechanik in dieser Hinsicht viel einfacher ist als die klassische Mechanik. Da die stochastische Unabhängigkeit die Schlüsselstelle eines jeden Beweises für ein Gesetz der großen Zahlen ist, soll dieses Konzept im folgenden erklärt werden.

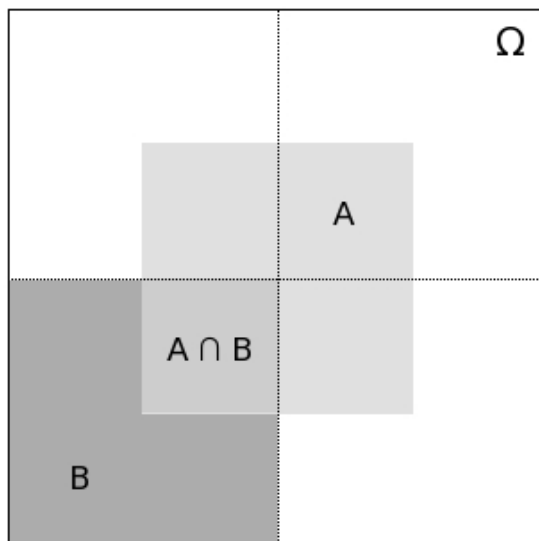
Es ist naheliegend, zwei Ereignisse als unabhängig voneinander aufzufassen, wenn das Eintreten des ersten keinen Einfluss auf den Eintritt des zweiten Ereignisses hat. Dazu dürfen sich die beiden Mengen, die Ereignis  $A$  bzw.  $B$  repräsentieren, nicht in irgendeiner beliebigen Weise zueinander verhalten.



Sind  $A$  und  $B$  zueinander disjunkt, ist es nicht möglich, dass Ereignis  $B$  noch eintritt wenn  $A$  schon eingetreten ist. Es befindet sich kein Element der Menge  $B$  mehr in  $A$ . Daher sind  $A$  und  $B$  nicht unabhängig voneinander.



Ist  $A \subset B$  so tritt  $B$  sicher ein, wenn  $A$  eingetreten ist. Offensichtlich sind auch hier  $A$  und  $B$  nicht voneinander unabhängig (für  $B \neq \Omega$ ). Damit Unabhängigkeit gilt, darf sich das Verhältnis der Menge, die zu  $B$  führt, und der Menge aller noch möglichen Ereignisse nicht ändern.



Ist  $A$  eingetreten so ist die Menge die zu  $B$  führt  $A \cap B$ . Das Verhältnis zur Menge aller noch möglichen Ereignisse ist gegeben durch

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)},$$

und dieses soll gleich dem Anfangsverhältnis sein. Daher muss gelten

$$\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

ist  $\mathbb{P}(\Omega)$  ein normiertes Maß, d.h.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ , dann folgt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Dies ist die bekannte Bedingung für unabhängige Ereignisse. Die Verallgemeinerung auf mehrere Mengen lautet:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^N A_i\right) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) \quad (2.2)$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie definiert man Ereignisse als stochastisch unabhängig wenn (2.2) gilt. Daraus ergibt sich eine Definition für unabhängige Zufallsvariablen:

**Definition.** Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_k$  heißen stochastisch unabhängig, wenn ihre Urbilder stochastisch unabhängig sind

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_k)} = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}_{X_i} \quad (2.3)$$

$$\text{mit } \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_k)}(A_1 \times \dots \times A_k) = \mathbb{P}(\{X_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap X_k^{-1}(A_k)\})$$

Nach der bisherigen Diskussion soll noch einmal kurz Smoluchowski Frage in Erinnerung gerufen werden:

Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf regelmäßige Naturgesetze zurückzuführen ist? Oder mit anderen Worten: Wie können gesetzmäßige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

In einem deterministischen Universum gibt es keinen „echten“ oder anfänglichen Zufall. Die statistischen Regelmäßigkeiten, welche wir beobachten, interpretieren wir als Zufall. Sie treten in dieser Form auf, weil sich ein typisches Universum so verhält. Um dies zu beweisen, müsste man also ein Gesetz der großen Zahlen für das Universum nachweisen. Dass dies nicht machbar ist, dürfte klar sein. Aber es ist dies die einzige Antwort auf diese Frage, die wir kennen.

## 2.4 Wahrscheinlichkeiten

In vielen Bereichen der Physik, insbesondere in der Quantenmechanik, spielen Wahrscheinlichkeiten eine große Rolle. Deshalb sei hier kurz gesagt, was unter einer Wahrscheinlichkeit zu verstehen ist. In den vorherigen Abschnitten haben wir gesehen, dass sich Systeme so verhalten, wie es typisch für diese ist. Was typisch ist, erfahren wir durch das Gesetz der großen Zahlen und dem zugehörigen Erwartungswert. Der Erwartungswert ist also die theoretische Vorhersage der empirischen Verteilung. Setzt man nun als Zufallsvariablen geeignete charakteristische Funktionen ein, so sind die empirischen Verteilungen gleich den relativen Häufigkeiten. Der Erwartungswert wird zu:

$$\mathbb{E}(\chi_A) = \int \chi_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A d\mathbb{P}(\omega) =: p(A)$$

Letzteres entspricht den bekannten Wahrscheinlichkeiten. Wahrscheinlichkeiten sind also als theoretische Vorhersagen für relative Häufigkeiten zu interpretieren. Damit es gerechtfertigt ist von einem Wert  $p(A)$  als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$  zu sprechen, müsste also zuerst ein Gesetz der großen Zahlen bewiesen werden. In der Quantenmechanik wird  $|\psi|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert, was nichts anderes heißt, als das man implizit ein Gesetz der großen Zahlen postuliert. In dieser Arbeit soll die Interpretation begründet werden, daher muss ein Gesetz der großen Zahlen bewiesen werden.



### 3 Bohmsche Mechanik

Im Rahmen der Quantenmechanik, so wie sie heute allgemein verstanden wird, ist die Ableitung des Bornschen statistischen Gesetzes nicht möglich. Dieses Gesetz ist jedoch experimentell ausserordentlich gut bestätigt. In die Quantenmechanik findet es daher Eingang als Axiom. Somit ist klar, dass wir für unsere Ableitung eine andere Mechanik zugrunde legen müssen, die Bohmsche Mechanik. Die Bohmsche Mechanik ist eine nicht-relativistische Theorie über Punktteilchen, welche alle Vorhersagen der nicht-relativistischen Quantenmechanik reproduziert. Ihr liegt jedoch ein fundamental anderes Wirklichkeitsverständnis zu Grunde. In der Bohmschen Mechanik werden Teilchen als Teilchen verstanden<sup>6</sup>, egal ob man sie beobachtet oder nicht. Als solche haben sie insbesondere zu jedem Zeitpunkt wohldefinierte Orte und bewegen sich entlang Trajektorien im physikalischen Raum. Der beobachtbare Wellencharakter der Materie kommt durch das Bewegungsgesetz der Bohmschen Teilchen zustande, welches von der aus der „klassischen“ Quantenmechanik bekannten Wellenfunktion  $\psi$  abhängt. Diese wird in der Bohmschen Mechanik wie in der Quantenmechanik durch die Schrödingergleichung bestimmt. Die definierenden Gleichungen lauten wie folgt:

**Postulat.** *Der Zustand eines Systems ist durch die Wellenfunktion  $\psi$  des Systems und die Teilchenorte  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N)$  bestimmt. Die Wellenfunktion erfüllt die Schrödingergleichung, die Teilchenkonfiguration ist zu jeder Zeit durch die Bewegungsgleichung und die Anfangsbedingung festgelegt.*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{q}, t) = - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k \psi(\mathbf{q}, t) + V(\mathbf{q})\psi(\mathbf{q}, t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v}^\psi(\mathbf{q}, t) = \hbar m^{-1} \mathfrak{S} \frac{\nabla \psi}{\psi}(\mathbf{q}, t) \quad (3.2)$$

mit der Massenmatrix  $m = (m_k \delta_{lk})_{l,k=1,\dots,N}$ . Für den Ort des k-ten Teilchens gilt

$$\frac{d\mathbf{Q}_k}{dt} = \mathbf{v}_k^\psi(\mathbf{Q}, t) = \frac{\hbar}{m_k} \mathfrak{S} \frac{\nabla_k \psi}{\psi}(\mathbf{Q}, t)$$

---

<sup>6</sup>Teilchen sind hier eine lokalisierte Form von Materie, wobei nicht gesagt wird was diese Materie ist

Der Grund für die Annahme von objektiven Teilchenorten beruht auf der experimentellen Tatsache, dass Teilchen bei ihrem Nachweis immer als einzelne, diskrete Teilchen gemessen werden. Aus der Messung *eines* Teilchens ist es nicht möglich, auf den Wellencharakter der Materie zu schliessen. Erst in der statistischen Verteilung der Orte vieler Teilchen (vgl. Doppelspaltexperiment) tritt dieser auf. Es ist daher naheliegend anzunehmen, dass Teilchen, unabhängig von unserer Beobachtung, existieren, und es gibt keinen Grund der a priori dagegen spricht. Mit dieser Grundannahme ergibt sich Gleichung (3.2) völlig zwanglos aus den minimalen Forderungen an eine nicht-relativistische Theorie (v.a. Galilei-Invarianz). Mehr sei zu der Begründung dieser beiden Gleichungen an dieser Stelle aber nicht gesagt (siehe [4], Kapitel 8).

Aufgrund der Gleichung (3.2) tritt in der Bohmschen Mechanik das sogenannte Meßproblem der Quantenmechanik nicht mehr auf. Das Meßproblem verdeutlicht einen Widerspruch der aus den Axiomen der Quantenmechanik resultiert (siehe [2] und [4]). Insofern kann man Bohmsche Mechanik als eine minimale Vervollständigung der Quantenmechanik auffassen, wobei sämtliche Axiome, die den Rechenkalkül der Quantenmechanik betreffen, nicht mehr benötigt werden. Vielmehr erfährt der Quantenformalismus durch die Bohmsche Mechanik eine Begründung (siehe [4], Kapitel 12-15) und folgt aus der Quantengleichgewichtshypothese, welche wir im nächsten Kapitel aus den Grundannahmen der Bohmschen Mechanik ableiten werden.

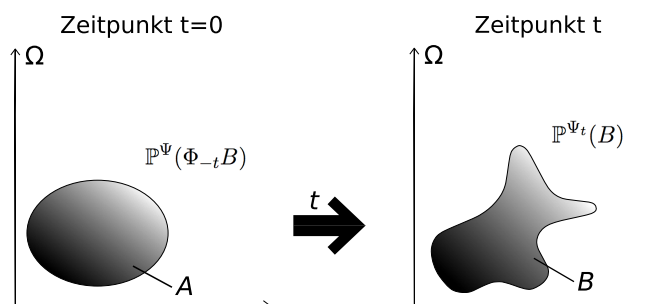
Zuletzt sei gesagt, dass die Bohmsche Mechanik zwar eine deterministische Theorie ist, keinesfalls aber einen zwanghaften Versuch darstellt, zur klassischen Physik zurückzukehren. Bohmsche Mechanik ist nicht Newtonsch und damit grundlegend verschieden von der klassischen Physik. Sie stellt vielmehr den Versuch einer objektiven, d.h. beobachterunabhängigen Naturbeschreibung dar (was nicht heißt das der Meßprozess ein System nicht beeinflusst).

## 4 Das Bornsche statistische Gesetz

Das Bornsche Gesetz besagt, dass die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen im Intervall  $[\mathbf{r}; \mathbf{r} + d\mathbf{r}]$  zu finden gleich  $|\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$  ist. Mit Abschnitt 2.4 ist klar was damit gemeint ist. In einem Ensemble von identischen Systemen welche alle die selbe Wellenfunktion  $\varphi$  haben, ist die relative Häufigkeit der Teilchenkoordinaten typischerweise nahe an der  $|\varphi|^2$ -Verteilung. Es muss also ein Gesetz der großen Zahlen bewiesen werden. Dies wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels geschehen. Zuerst muss die Frage nach dem Maß, welches uns typisch definieren soll, geklärt werden. Davon handelt der erste Abschnitt.

### 4.1 Das richtige Maß

Die Forderungen an das Maß sind die gleichen wie zuvor. Das Maß muss typisch zeitunabhängig definieren und aus den physikalischen Gesetzen heraus ableitbar sein. Da die Dynamik eines Systems von der Wellenfunktion  $\psi$  bestimmt ist, wird das Maß in irgendeiner Weise von  $\psi$  abhängen, also  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^\psi$ . Die Wellenfunktion welchen Systems<sup>7</sup> soll das sein? Wir nehmen an, dass das Bornsche Gesetz universal, d.h. für alle Subsysteme des Universums gültig ist. Deswegen muss man bei dem System beginnen, das alle anderen Subsysteme enthält, dem Universum selbst bzw. der Wellenfunktion  $\Psi$  des Universums. Die Wellenfunktion ist nach (3.1) im allgemeinen zeitabhängig, woraus folgt, dass das Maß  $\mathbb{P}^{\Psi_t}$  im allgemeinen auch zeitabhängig ist. Die Forderung nach Stationarität ist daher bedeutungslos. Vielmehr muss diese Eigenschaft verallgemeinert werden um zu garantieren, dass das Maß Typisch zeitunabhängig definiert. Nach Dürr, Goldstein und Zanghi, N. ([3]) muss das Maß *equivariant* sein, um dies sicher zu stellen. Zu sehen ist das wie folgt.



**Abbildung 2:** Zeitliche Entwicklung einer Menge und dem zugehörigen Maß

<sup>7</sup>Es ist zu beachten das der Begriff „Wellenfunktion eines System“ bisher noch in keiner Weise präzisiert wurde

Zu einem bestimmten Zeitpunkt (hier z.B.  $t = 0$ ) ordnet man einer Menge  $A$  das Maß  $\mathbb{P}^\Psi$  zu. Unter dem Bohmschen Fluss  $\Phi_t^\Psi$  entwickelt sich die Menge zu  $B := \Phi_t^\Psi A$ . Damit Typisch zeitunabhängig definiert wird, darf sich das Maß einer Menge unter der Zeitentwicklung nicht ändern und es muss gelten:

$$\mathbb{P}^\Psi(\Phi_{-t}B) = \mathbb{P}^{\Psi_t}(B).$$

Mit

$$\mathbb{P}_t^\Psi(B) = \mathbb{P}^\Psi(\Phi_{-t}B)$$

gilt dann

$$\mathbb{P}_t^\Psi(B) = \mathbb{P}^{\Psi_t}(B). \quad (4.1)$$

Die Eigenschaft (4.1) wird *Äquivarianz* genannt und bedeutet das die Abbildung von  $\Psi$  nach  $\mathbb{P}^\Psi$  invariant unter der Zeitentwicklung ist.

$$\begin{array}{ccc} \Psi & \xrightarrow{\text{Schrödingg.}} & \Psi_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^\Psi & \xrightarrow{\text{Bohm.Fluss}} & \mathbb{P}^{\Psi_t} \end{array}$$

Wie in Abschnitt 2.2.1 erläutert ist es möglich, ein Maß durch das Lebesgue-Integral und einer Dichte  $\rho$  zu konstruieren. Nun kann man zeigen (Anhang A.2), dass die zeitliche Entwicklung von  $\rho$  die aus dem Bohmschen Fluss resultiert, durch eine Kontinuitätsgleichung beschrieben ist.

$$\frac{\partial \rho_t^\Psi}{\partial t} + \nabla(\rho_t^\Psi \mathbf{v}^\Psi) = 0 \quad (4.2)$$

Obiges Diagramm ist dann äquivalent zu folgendem

$$\begin{array}{ccc} \Psi & \xrightarrow{\text{Schrödingg.}} & \Psi_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho^\Psi & \xrightarrow[\text{(4.2)}]{\text{K.Gleichung}} & \rho^{\Psi_t} \end{array}$$

Da die Lösung der Kontinuitätsgleichung nicht allgemein möglich ist muss man für ein  $\rho^\Psi(t)$  nachweisen, dass es (4.2) für alle  $t$  erfüllt. Dann ist  $\rho_t^\Psi = \rho^\Psi(t)$ . Für die Äquivarianzeigenschaft des Maßes muss dann nur noch  $\rho_t^\Psi = \rho^{\Psi_t}$  gezeigt werden. Die Dichte, welche diese Bedingungen erfüllt, wurde von Born und Bohr entdeckt und folgt aus der Schrödingergleichung.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k \Psi + V\Psi$$

Durch komplexe Konjugation folgt

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k \Psi^* + V\Psi^*.$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\Psi^*$ , der zweiten mit  $\Psi$  und anschließende Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} i\hbar \underbrace{\left( \frac{\Psi^* \partial \Psi}{\partial t} - \frac{\Psi \partial \Psi^*}{\partial t} \right)}_{\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t}} &= - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k} (\Psi^* \Delta_k \Psi - \Psi \Delta_k \Psi^*) \\ &= - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k \underbrace{(\Psi^* \nabla_k \Psi - \Psi \nabla_k \Psi^*)}_{2i \Im(\Psi^* \nabla_k \Psi)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Mit

$$|\Psi|^2 \mathbf{v}_k^\Psi = |\Psi|^2 \frac{\hbar}{m_k} \Im \frac{\nabla_k \Psi}{\Psi} = \frac{\hbar}{m_k} \Im(\Psi^* \nabla_k \Psi)$$

folgt aus (4.3)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} &= - \sum_k i\hbar \nabla_k (|\Psi|^2 \mathbf{v}_k^\Psi) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \nabla (|\Psi|^2 \mathbf{v}^\Psi) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Gleichung (4.4) ist die sogenannte Quantenflußgleichung (Quantum Flux equation) mit dem Quantenfluß  $\mathbf{j}^\Psi = |\Psi|^2 \mathbf{v}^\Psi$ . Der Vergleich mit (4.2) zeigt  $\rho_t^\Psi = |\Psi(\mathbf{q}, t)|^2$ . Offensichtlich gilt auch  $\rho^{\Psi t} = |\Psi(\mathbf{q}, t)|^2$ , und damit  $\rho_t^\Psi = \rho^{\Psi t}$ . Das bedeutet, dass das über  $\rho^{\Psi t}$  definierte normierte Maß

$$\mathbb{P}^{\Psi t}(A) = \int_A |\Psi(\mathbf{q}, t)|^2 d\mathbf{q} \quad (4.5)$$

mit

$$\int |\Psi(\mathbf{q}, t)|^2 d\mathbf{q} = 1$$

äquivariant ist.(4.5) nennt man das Quantengleichgewichtsmaß.

An diesem Punkt treten oft einige Missverständnisse auf.  $\mathbb{P}^{\Psi_t}$  aus (4.5) hat nichts mit den aus der Quantenmechanik bekannten Wahrscheinlichkeiten  $|\psi|^2$  zu tun.  $\mathbb{P}^{\Psi_t}$  ist ein Maß auf dem Konfigurationsraum des Universums das uns sagt was typisch ist und was nicht.  $|\psi|^2$  wird dagegen als Wahrscheinlichkeit in Systemen interpretiert. Die Interpretation von  $\mathbb{P}^{\Psi_t}$  als Wahrscheinlichkeit ist aber völlig sinnlos. Wir haben nur *ein* Universum und Wahrscheinlichkeiten sind statistische Vorhersagen für ein *Ensemble* an Systemen.

Weshalb ist das Maß nicht einfach das Konfigurationsraumvolumen analog zum klassischen Fall, der intuitiv so einleutend war? Im klassischen Fall legt ein Punkt im Phasenraum den Zustand Systems eindeutig und vollständig fest. Es ist daher naheliegend, dass nur das Volumen des Phasenraums angibt, was typisch ist. In der Bohmschen Mechanik ist der Zustand durch einen Punkt im Konfigurationsraum *und* die Wellenfunktion darauf festlegt. Aus diesem Grund muss sowohl das Volumen als auch die Wellenfunktion eine Rolle für das Maß spielen. Unsere Intuition darf für die Begründung des Maßes nur von untergeordnetem Rang sein. Es muss sich aufgrund der physikalischen Gesetze begründen und ableiten lassen.

Warum schaut das Maß genauso aus wie  $|\psi|^2$ ? Wie oben gezeigt ergibt sich  $\mathbb{P}^{\Psi_t}$  mit der zwingenden Forderung von Äquivarianz völlig zwanglos aus den Grundannahmen der Bohmschen Mechanik. In [5] zeigen Goldstein und Struyve ausserdem, dass es das einzige äquivariante Maß der Bohmschen Mechanik ist. Vielmehr müsste man also die Frage stellen warum die Wahrscheinlichkeiten der Quantenmechanik genauso aussehen wie  $\mathbb{P}^{\Psi_t}$ <sup>8</sup>. Dies und die Rechtfertigung der Interpretation von  $|\psi|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte werden im Abschnitt 4.3 behandelt werden.

## 4.2 Wellenfunktion von Subsystemen

Unsere Beobachtungen zeigen, dass sich Subsysteme mitunter autonom verhalten(zumindest für eine gewisse Zeit). Dies bedeutet, dass man ihnen eine Wellenfunktion zuordnen kann, welche sich nach einer eigenen Schrödingergleichung entwickelt, und das System ein eigenes Bohmsches Bewegungsgesetz besitzt. Wie kann man Subsysteme in der Bohmschen Mechanik beschreiben, wenn man mit der Wellenfunktion des Universums beginnt? Dies soll im folgenden erklärt werden.

---

<sup>8</sup>Es sei nochmals betont das sie nur gleich *aussehen*.  $\mathbb{P}^{\Psi_t}$  ist etwas substanziiell anderes als  $|\psi|^2$ .

### 4.2.1 Bedingte Wellenfunktion

Betrachten wir ein  $m$ -dimensionales Subsystem (x-System) des Universums mit der Konfiguration  $\mathbf{X}$ . Dies kann z.B. das Experiment enthalten, welches wir beschreiben wollen. Dann sei mit  $\mathbf{Y}$  die Konfiguration der  $n$ -Dimensionale Umgebung (y-System) bezeichnet, also der „Rest“ vom Universum. Die Gesamtkonfiguration des Universum spaltet dann auf in  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

Da wir die Wellenfunktion des Universum nicht kennen, ist ein Konzept zur Beschreibung des x-Systems gesucht, welches die Kenntnis von  $\Psi$  nicht benötigt. Das x-System verhält sich nach Gleichung (3.2) wie folgt

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}_x^\Psi(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) \propto \mathfrak{S} \frac{\nabla_x \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Y}(t))}{\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Y}(t))} \Big|_{\mathbf{X}(t)}.$$

Dies legt die Definition einer *bedingten* Wellenfunktion nahe

$$\varphi^Y(\mathbf{x}) := \frac{\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Y})}{\|\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Y})\|},$$

mit der Norm

$$\|\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Y})\| = \left[ \int |\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Y})|^2 d^m x \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Für das x-System gilt dann

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}^{\varphi^Y}(\mathbf{X}(t)) \propto \mathfrak{S} \frac{\nabla \varphi^Y(\mathbf{x})}{\varphi^Y(\mathbf{x})} \Big|_{\mathbf{X}(t)}.$$

Die bedingte Wellenfunktion ist im allgemeinen unbekannt und entwickelt sich nicht zwingend gemäß einer eigenen Schrödingergleichung. Sie stellt aber die Verbindung zu dem bedingten Quantengewichtsmaß her. Dieses muss bedingt werden, um Vorhersagen für das typische Verhalten des x-Systems treffen zu können. Man stelle sich vor, die gesamte Umgebung  $\mathbf{Y}$  ist untypisch, dann wäre auch das Verhalten des Subsystems untypisch. Es ließe sich keine Vorhersage für das Subsystem treffen, wenn die  $\mathbf{Y}$ -Umgebung einmal gegeben ist. Die Bedingung des Maßes auf unsere gegebene Umwelt ist daher absolut notwendig.

Ganz allgemein ist das bedingte Maß  $\mathbb{P}(A|B)$  von  $A$  die Einschränkung des Maßes auf  $B$  mit anschließender Normierung.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Damit ergibt sich für das Quantengewichtsmaß

$$\mathbb{P}^\Psi(d^m x, d^n y) = |\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d^m x d^n y,$$

das bedingte Maß

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\Psi(\{\mathbf{Q} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{X} \in d^m x\} | \mathbf{Y}) &= \frac{|\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Y})|^2 d^m x}{\int |\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Y})|^2 d^m x} \\ &= |\varphi^{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})|^2 d^m x. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Natürlich ist die Einschränkung auf  $\mathbf{Y}$  viel zu stark. Wir werden nie die exakte Konfiguration der gesamten Umgebung kennen, ebensowenig wie wir die Wellenfunktion des Universums kennen. Erfahrungsgemäß hat aber z.B. die Wahl der Schuhe des Experimentators wenig Einfluss auf das Experiment selbst. Es ist also zu erwarten dass es viele Konfigurationen  $\mathbf{Y}$  gibt, die zur selben bedingten Wellenfunktion  $\varphi = \varphi^{\mathbf{Y}}$  gehören. Deshalb kann die Einschränkung in (4.6) ausgeweitet werden auf alle  $\mathbf{Q}$  die zur selben bedingten Wellenfunktion des x-Systems gehören.

Sei

$$\{\varphi = \varphi^{\mathbf{Y}}\} := \{\mathbf{Q} = (\mathbf{x}, \mathbf{Y}) | \varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})\}$$

Für bedingte Maße gilt ausserdem folgende Eigenschaft. Sei  $B = \bigcup B_i$  eine paarweise disjunkte Zerlegung von  $B$  und sei  $\mathbb{P}(A|B_i) = a$  für alle  $B_i$ . Aufgrund der Additivität des Maßes gilt

$$\mathbb{P}(B)a = \sum_i \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap B_i) = \mathbb{P}(A \cap B),$$

und deshalb  $\mathbb{P}(A|B) = a$ . Mit (4.6) gilt dann

$$\mathbb{P}^\Psi(\{\mathbf{Q} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{X} \in d^m x\} | \{\varphi = \varphi^{\mathbf{Y}}\}) = |\varphi(\mathbf{x})|^2 d^m x,$$

und um die Notation zu vereinfachen

$$\mathbb{P}^\Psi(\mathbf{X} \in d^m x | \varphi = \varphi^{\mathbf{Y}}) = |\varphi(\mathbf{x})|^2 d^m x. \quad (4.7)$$

Gleichung (4.7) wird später angewandt auf Bohmschen Subsysteme. Diese verhalten sich gewissermaßen autonom, da der Einfluss der Umgebung vernachlässigbar gering ist. Solchen Systemen können dann eine eigene Wellenfunktion, eine eigene Schrödingergleichung und eigene Bewegungsgesetze für die Teilchen zugeordnet werden.



#### 4.2.2 Effektive Wellenfunktion

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen ein System sich autonom verhält. Dies wäre sicherlich der Fall, wenn die Wechselwirkungen zwischen Umgebung und System vernachlässigbar sind, also  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}) \approx 0$ , und die Universumswellenfunktion eine Produktstruktur besitzen würde

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}).$$

Denn dann würde gelten

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial[\varphi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})]}{\partial t} &= - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k[\varphi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})] + V[\varphi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})] \\ \Rightarrow i\hbar \left( \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial t} + \varphi(\mathbf{x}) \frac{\partial\Phi(\mathbf{y})}{\partial t} \right) &= -\Phi(\mathbf{y}) \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \sum_j \frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta_j\Phi(\mathbf{y}) \\ &\quad + \Phi(\mathbf{y})V(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})\hat{V}(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{y}) + \underbrace{\tilde{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})}_{\approx 0}. \end{aligned}$$

Division durch  $\varphi(\mathbf{x})$  und  $\Phi(\mathbf{y})$  ergibt<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{1}{\varphi(\mathbf{x})} \left( i\hbar \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial t} + \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i\varphi(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \right)}_{=c} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\Phi(\mathbf{y})} \left( i\hbar \frac{\partial\Phi(\mathbf{y})}{\partial t} + \sum_j \frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta_j\Phi(\mathbf{y}) - \hat{V}(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{y}) \right)}_{=-c} = 0 \end{aligned}$$

Da  $\varphi(\mathbf{x})$  und  $\Phi(\mathbf{y})$  unabhängig voneinander sind, müssen sowohl der erste als auch der zweite Term konstant sein und sich gegenseitig aufheben. Damit spaltet die Schrödingergleichung in zwei unabhängige Gleichungen auf

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial t} &= - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i\varphi(\mathbf{x}) + (V(\mathbf{x}) + c)\varphi(\mathbf{x}) \\ i\hbar \frac{\partial\Phi(\mathbf{y})}{\partial t} &= - \sum_j \frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta_j\Phi(\mathbf{y}) + (\hat{V}(\mathbf{y}) - c)\Phi(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

$V$  ist aber nur bis auf eine Konstante genau festgelegt und somit ist zeitliche Entwicklung von  $\varphi(\mathbf{x})$  durch eine Schrödingergleichung bestimmt. Es ist

<sup>9</sup>Wegen (3.2) ist  $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$  und deshalb  $\varphi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \neq 0$

leicht zu sehen, dass sich das Geschwindigkeitsfeld ebenso aufspaltet wenn die Wellenfunktion eine Produktstruktur besitzt. Nach (3.2) ist

$$\mathbf{v}^\Psi \propto \frac{\nabla \Psi}{\Psi} = \nabla \ln \Psi,$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \nabla \ln(\varphi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})) &= \nabla \ln \varphi(\mathbf{x}) + \nabla \ln \Phi(\mathbf{y}) \\ &= \begin{pmatrix} \nabla_x \ln \varphi(\mathbf{x}) \\ \nabla_y \ln \Phi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Bedingung der Produktstruktur ist jedoch viel zu speziell und unphysikalisch. Jede Wechselwirkung des Systems mit der Umgebung würde sie zerstören. Wenn aber in gewissen Situationen gilt, dass sich die Wellenfunktion aufspaltet

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}) + \Psi^\perp(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.8)$$

und  $\Phi(\mathbf{y})$ ,  $\Psi^\perp(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  makroskopisch disjunkte  $\mathbf{y}$ -Träger haben und zusätzlich

$$\mathbf{Y} \in \text{supp } \Phi$$

ist, dann nennt man die bedingte Wellenfunktion  $\varphi(\mathbf{x})$  effektive Wellenfunktion des  $\mathbf{x}$ -Systems (nach [4], S. 216).

Diese Aufspaltung (4.8) tritt im quantenmechanischen Messprozess auf und ist die präzise mathematische Beschreibung des Kollaps der Wellenfunktion ([4], S. 216-217).

*Anmerkung:*

Bei Quantenmechanische Experimente enthalten die einzelnen Ensemblemitglieder meist nicht mehr als ein paar Teilchen und für gewöhnlich besteht das ganze Experiment, und damit das Ensemble, aus nicht mehr als 1000 oder 10000 Mitgliedern bzw. Teilchen. Diese Größenordnungen sind mikroskopisch im Vergleich zu den makroskopischen Systemen mit  $10^{23}$  Teilchen. Makroskopisch disjunkte  $\mathbf{y}$ - Träger heißt dann, dass die Träger im Konfigurationsraum des  $\mathbf{y}$ -Systems soweit auseinander liegen, dass wenn

$$\mathbf{Y} \in \text{supp } \Phi$$

gilt, für alle mikroskopisch großen  $\mathbf{X}$  folgt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \notin \text{supp } \Psi^\perp.$$

### 4.3 Typische Empirische Verteilung

Nachdem der Begriff Wellenfunktion eines Subsystems präzisiert wurde und das bedingte Maß auf ein Subsystem bekannt ist, kann nun das Bornsche statistische Gesetz, auch Quantengleichgewichtshypothese genannt, begründet werden. Das Gesetz lautet wie folgt:

**Quantengleichgewichtshypothese.** *Wenn ein System die effektive Wellenfunktion  $\varphi$  hat, dann sind seine Teilchenkoordinaten  $|\varphi|^2$  verteilt.*

Wie zu Beginn des Kapitels erläutert, muss nun ein Gesetz der großen Zahlen bewiesen werden. Nach Satz 1 muss dafür gezeigt werden, dass die Ortsvariablen der Ensemblemitglieder stochastisch unabhängig voneinander sind.

Sei hierfür das  $x$ -System zusammengesetzt aus  $N$  *mikroskopisch kleinen* Untersystemen  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  (den Ensemblemitgliedern) mit den effektiven Wellenfunktionen  $\varphi_i(\mathbf{x}_i)$  und  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ . Ist  $N$  nicht makroskopisch groß, so lautet die effektive Wellenfunktion des  $x$ -Systems:

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \prod_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}_i) \quad (4.9)$$

Diese Tatsache kann wie folgt eingesehen werden. Für jedes  $i$  gilt nach (4.8)

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{y}) = \varphi_i(\mathbf{x}_i)\Phi_i(\mathbf{y}_i) + \Psi_i^\perp(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i),$$

wobei  $\Phi_i(\mathbf{y}_i)$  und  $\Psi_i^\perp(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  makroskopisch disjunkten  $\mathbf{y}_i$ -Träger haben und  $\mathbf{Y}_i \in \text{supp } \Phi_i$ . Da die  $\mathbf{x}_i$ -Systeme mikroskopisch sind und  $N$  nicht makroskopisch groß ist, ist auch das  $\mathbf{x}$ -System mikroskopisch. Deswegen müssen  $\Phi_i(\mathbf{y}_i)$  und  $\Psi_i^\perp(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  schon einen disjunkten  $\mathbf{y}$ -Träger besitzen. Des Weiteren ist

$$\mathbf{Y} \in \text{supp } \Phi_i \cap \dots \cap \Phi_N.$$

Also muss für alle  $i$  und dieses  $\mathbf{Y}$  gelten

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{Y}) = \varphi_i(\mathbf{x}_i)\Phi_i(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{x}}_i), \quad (4.10)$$

mit

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_N).$$

Setzt man folgendermaßen an

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{Y}) = \prod_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}_j)\hat{\Phi}(\mathbf{Y}, \mathbf{x}),$$

teilt durch  $\prod \varphi_j(\mathbf{x}_j)$  und setzt mit (4.10) gleich, ergibt sich

$$\hat{\Phi}(\mathbf{Y}, \mathbf{x}) = \frac{\Phi_i(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{x}}_i)}{\prod_{j \neq i} \varphi_j(\mathbf{x}_j)}.$$

Das bedeutet  $\hat{\Phi}$  ist unabhängig von  $\mathbf{x}_i$ . Da (4.10) aber für alle  $i$  gilt, ist somit  $\hat{\Phi}$  unabhängig von  $\mathbf{x}$

$$\Phi(\mathbf{Y}) := \hat{\Phi}(\mathbf{Y}) = \hat{\Phi}(\mathbf{Y}, \mathbf{x}).$$

Daher ist (4.9) wahr.

Sei nun die effektive Wellenfunktion identisch für jedes der  $N$  Subsysteme bzgl. der entsprechenden Koordinatensystems in den  $x_i$ -Systemen. Mit (4.7) und (4.9) folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\Psi(\mathbf{X}_1 \in dx_1, \dots, \mathbf{X}_N \in dx_N | \varphi = \varphi^Y) &= |\varphi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 d^m x \\ &= \prod_{i=1}^N |\varphi(\mathbf{x}_i)|^2 dx_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\mathbb{P}^\Psi$  des  $x$ -Systems ist also ein Produktmaß. Nach (2.3) sind die  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$  daher unabhängige Zufallsvariablen und mit Satz 1 gilt nun:

$$\mathbb{P}^\Psi \left( \left\{ \mathbf{Q} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{X}_i) - \int f(\mathbf{x}) |\varphi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right| > \epsilon \right\} | \varphi = \varphi^Y \right) = \delta(N, \epsilon, f) \quad (4.12)$$

mit  $\delta(N, \epsilon, f) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ .

Setzt man zum Schluss  $f(x) = \chi_A(x)$  so erhält man das die relative Häufigkeit ein Teilchen in  $A$  zu finden nahe bei  $\int_A |\varphi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$  ist. Die Menge der  $\mathbf{Q}$  für welche die Abweichung signifikant ist, ist verschwindend gering. Typischerweise ist die ist die Teilchenkonfiguration also  $|\varphi(\mathbf{x})|^2$  verteilt. Nach Abschnitt 2.4 es nun gerechtfertigt  $\int_A |\varphi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$  als Wahrscheinlichkeit zu interpretieren ein Teilchen in  $A$  zu finden. Dies ist das *Bornsche statistische Gesetz*.

*Anmerkungen:*

Da  $N$  nicht makroskopisch groß werden darf, darf es auch nicht gegen unendlich gehen. Makroskopisch ist aber im Sinne der Dimension des  $y$ -Systems zu sehen. Daher gilt (4.12) für jede realisierbare Ensemblegröße.

Die Ableitung, die in dieser Arbeit präsentiert wurde, gilt für den Fall, dass in allen Systemen eines Ensembles die Messung zum gleichen Zeitpunkt

vorgenommen wurde. Eine Ensemblemessung wird aber normalerweise durch die wiederholte Messung an identisch präparierten Systemen realisiert. Die Messungen finden also nicht simultan statt, ausserdem benötigt die Messung selbst Zeit. Möchte man obige Ableitung auf diese Fälle verallgemeinern, muss man also noch die Zeit mit einbeziehen. Dies ist möglich und wurde von Dürr, Goldstein und Zanghi mit der „multi-time-analysis“ in [3] auch gemacht. Den Rahmen dieser Arbeit würde es allerdings sprengen.

## 5 Diskussion

Das Ziel dieser Bachelorarbeit war, zu erklären warum  $|\psi|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann. Das ist der gerechtfertigt, wenn dem System eine eigene Wellenfunktion zugeordnet werden kann. Es hat sich jedoch gezeigt, dass dies nur in bestimmten Situationen sinnvoll möglich ist. In der Praxis entsprechen jene den Experimenten in unseren Laboren. Für solche Fälle kann man dann mithilfe der Quantengleichgewichtshypothese die Heisenbergsche Unschärferelation und den Quantenformalismus der Quantenmechanik herleiten. Die gesamte (nicht-relativistische) Quantenmechanik kann somit durch die Bohmsche Mechanik begründet werden. Vielmehr noch scheint die Quantenmechanik aus der Bohmschen Sichtweise heraus nur eine Näherung für lokal begrenzte Systeme zu sein, mit denen wir in irdischen Experimenten hantieren. Die aktuellen Schwierigkeiten die Quantenmechanik mit einer globalen Theorie wie der allgemeinen Relativitätstheorie zu vereinen, könnten hieraus resultieren. Gelingt es die Bohmsche Mechanik relativistisch zu verallgemeinern, dürften sich auf dem Gebiet der Quantengravitation durchaus neue Perspektiven ergeben.

## A Anhang

### A.1 Beweis von Satz 1

Beweis nach [4], S.105-106

*Beweis.* Sei

$$A_\epsilon^N = \left\{ \omega \mid \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(\omega) - \mathbb{E}(X_0) \right| > \epsilon \right\}$$

Aufgrund der Gleichverteilung gilt

$$\begin{aligned} A_\epsilon^N &= \left\{ \omega \mid \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [X_k(\omega) - \mathbb{E}(X_k)] \right| > \epsilon \right\} \\ &= \left\{ \omega \mid \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [X_k(\omega) - \mathbb{E}(X_k)] \right)^2 > \epsilon^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Des Weiteren gilt

$$\mathbb{P}(A_\epsilon^N) = \int_{A_\epsilon^N} d\mathbb{P}(\omega) = \int \chi_{A_\epsilon^N}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(\chi_{A_\epsilon^N}) \quad (\text{A.2})$$

Aus A.1 folgt offensichtlich

$$\chi_{A_\epsilon^N}(\omega) \leq \frac{\left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [X_k(\omega) - \mathbb{E}(X_k)] \right)^2}{\epsilon^2}$$

Daher (mit A.2),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_\epsilon^N) &\leq \int \frac{\left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [X_k - \mathbb{E}(X_k)] \right)^2}{\epsilon^2} d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \frac{1}{N^2 \epsilon^2} \mathbb{E} \left( \left[ \sum_{k=1}^N X_k - \mathbb{E}(X_k) \right]^2 \right) \\ &= \frac{1}{N^2 \epsilon^2} \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^N [X_k - \mathbb{E}(X_k)]^2 \right) + \frac{1}{N^2 \epsilon^2} \mathbb{E} \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N [X_k - \mathbb{E}(X_k)] [X_j - \mathbb{E}(X_j)] \right), \end{aligned}$$

Aufgrund der identischen Verteilung und der Unabhängigkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N\epsilon^2} \mathbb{E} \left( [X_0 - \mathbb{E}(X_0)]^2 \right) + \frac{1}{N^2\epsilon^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \mathbb{E} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) \mathbb{E} (X_j - \mathbb{E}(X_j)) \\ &= \frac{1}{N\epsilon^2} \mathbb{E} \left( [X_0 - \mathbb{E}(X_0)]^2 \right) = \frac{1}{N\epsilon^2} \mathbb{V}(X_0) \end{aligned}$$

Wobei die triviale Tatsache  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0$  benutzt wurde, und  $\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$  die Varianz ist. □

## A.2 Zur Maßdichte und Kontinuitätsgleichung

Nach Abschnitt 2.2.1 lässt sich ein Maß  $\mathbb{P}(A)$  schreiben als

$$\mathbb{P}(A) = \int \chi_A \rho \, d\lambda.$$

Es soll nun gezeigt werden (nach [4], S. 21-22), dass die zeitliche Änderung des Maßes  $\mathbb{P}(A)$  aufgrund des Flusses ausgedrückt werden kann durch eine zeitlich veränderliche Dichte  $\rho$  welche durch eine Kontinuitätsgleichung bestimmt wird. Dann ist  $\mathbb{P}_t(A)$  gegeben durch

$$\mathbb{P}_t(A) = \int \chi_A(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) \, d\lambda(\mathbf{x}).$$

Nach Definition gilt

$$\mathbb{P}_t(A) = \mathbb{P}(\Phi_{-t}A),$$

und damit

$$\int \chi_A(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) \, d\lambda(\mathbf{x}) = \int \chi_{\Phi_{-t}A}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \, d\lambda(\mathbf{x}) = \int \chi_A(\Phi_t(\mathbf{x})) \rho(\mathbf{x}) \, d\lambda(\mathbf{x}).$$

Ersetzt man nun die charakteristische Funktion in durch eine glatte Funktion mit kompaktem Träger so folgt,

$$\int f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) \, d\lambda(\mathbf{x}) = \int f(\Phi_t(\mathbf{x})) \rho(\mathbf{x}) \, d\lambda(\mathbf{x}). \quad (\text{A.3})$$

Ableitung nach  $t$  ergibt dann

$$\int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\lambda(\mathbf{x}) = \int \frac{d\Phi_t}{dt} [\nabla f(\Phi_t(\mathbf{x}))] \rho(\mathbf{x}) \, d\lambda(\mathbf{x}), \quad (\text{A.4})$$

und mit  $d\Phi_t/dt = \mathbf{v}(\Phi_t)$

$$\int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\lambda(\mathbf{x}) = \int \mathbf{v}(\Phi_t(\mathbf{x})) [\nabla f(\Phi_t(\mathbf{x}))] \rho(\mathbf{x}) \, d\lambda(\mathbf{x}).$$



Wendet man (A.3) mit  $\tilde{f}(\Phi_t(\mathbf{x})) = \mathbf{v}(\Phi_t(\mathbf{x})) [\nabla f(\Phi_t(\mathbf{x}))]$  an, so folgt für die rechte Seite

$$\int \mathbf{v}(\mathbf{x}) [\nabla f(\mathbf{x})] \rho(\mathbf{x}, t) d\lambda(\mathbf{x})$$

und mit partieller Integration

$$- \int f(\mathbf{x}) \nabla [\mathbf{v}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t)] d\lambda(\mathbf{x}).$$

Da  $f$  beliebig ist, gilt mit (A.4) die Kontinuitätsgleichung für  $\rho$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla [\mathbf{v}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t)] = 0.$$

## Literatur

- [1] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter Lehrbuch, 1992
- [2] Bell, J.S.: *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2004
- [3] Dürr, D., Goldstein, S., und Zanghi, N.: *Quantum Equilibrium and the Origin of Absolute Uncertainty*, Journal of Statistical Physics 67, 843-907 (1992)
- [4] Dürr, D., Teufel, S.: *Bohmian Mechanics: The Physics and Mathematics of Quantum Theory*, Springer, 2009
- [5] Goldstein, S., Struyve, W.: *On the Uniqueness of Quantum Equilibrium in Bohmian Mechanics*, Journal of Statistical Physics 128, 1197-1209 (2007)
- [6] Smoluchowski, M.: Die Naturwissenschaften 17, 253 (1918)

## **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die genannten Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Hechendorf, 8. Juni 2009

Johannes Nissen-Meyer