MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
04.06.2018

# Übungsblatt 9
# für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 05.06.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

## Aufgabe 1

Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Genau dann besitzt $V$ nur einelementige Basen, wenn ein $v \in V$ mit $V = \mathrm{lin}(v)$ und $v \neq 0_V$ existiert. (Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass jeder $K$-Vektorraum mindestens eine Basis besitzt.)

(ii) Setzen wir nun voraus, dass $B = \{v, w\}$ eine zweielementige Basis von $V$ ist. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $w' \in V$ die Menge $B' = \{v, w'\}$ genau dann eine Basis von $V$ ist, wenn $\lambda, \mu \in K$ mit $w' = \lambda v + \mu w$ und $\mu \neq 0$ existieren.

## Aufgabe 2

Geben Sie für die folgenden $K$-Vektorräume $V$ eine Basis an, und weisen Sie die Basiseigenschaft jeweils nach. Sie dürfen dabei als gegeben annehmen, dass es sich tatsächlich jeweils um einen $K$-Vektorraum handelt.

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$

(ii) $K = \mathbb{R}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ mit } a + b + c + d = 0 \right\}$

(iii) $K = \mathbb{R}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ w & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{C}} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{C} \text{ mit } u + v + w = 0 \right\}$

## Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ und $\mathcal{P}_n := \{\ p : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich $n$.

(i) Weisen Sie nach, dass die Menge $M_1 := \{m_0, ..., m_n\} \subseteq \mathcal{P}_n$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bildet, wobei die Monome $m_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert seien durch $m_k : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k$.

(ii) Seien außerdem die Polynome $p_k : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \prod_{i=0}^{k-1}(x - i) = x(x-1) \cdot .... \cdot (x - k + 1)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $p_0 : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge $M_2 := \{p_0, ..., p_n\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bildet.