Übungsblatt 5
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 08.05.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Achten Sie beim Lösen der Aufgaben auf Vollständigkeit. Das bedeutet auch, dass Sie jeden Schritt begründen, indem Sie notieren, welche Eigenschaft (z.B. Assoziativität, Kommutativität, neutrales Element, inverses Element) benutzt wurde.

Aufgabe 1
Sei $(M, \cdot)$ ein Monoid. Wir sagen, ein Element $a \in M$ erfüllt die *linksseitige Kürzungsregel*, falls für $b, c \in M$ aus $ab = ac$ jeweils die Gleichung $b = c$ folgt. Sei M' die Menge aller Elemente aus M, die die linksseitige Kürzungsregel erfüllen.

(i) Zeigen Sie, dass M' unter der Verknüpfung $\cdot$ von M abgeschlossen ist, und dass M' mit der auf M' eingeschränkten Verknüpfung zu einem Monoid wird.

(ii) Beweisen Sie: Ist M' endlich, dann ist M' sogar eine Gruppe.
Hinweis: Verwenden Sie dafür die Abbildung $\tau_a : M' \to M', x \mapsto ax$ mit $a \in M'$.

(iii) Entscheiden Sie, ob die Aussage aus Teil (ii) auch für unendliches M' noch gültig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung durch einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 2
Sei $G, \circ$ eine Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$. Wir nennen U eine *Untergruppe von* G, wenn

(i) $\forall a, b, \in U : a \circ b \in U$

(ii) $\forall a \in U : a^{-1} \in U$

Zeigen Sie: $\qquad U$ Untergruppe von $G \quad \Leftrightarrow \quad \forall a, b \in U : a \circ b^{-1} \in U$

Aufgabe 3 (Staatsexamen F15T3A1)
Gegeben seien eine Gruppe G und drei Untergruppen $U_1, U_2, V \subseteq G$ mit der Eigenschaft, dass $V \subseteq U_1 \cup U_2$. Zeigen Sie, dass $V \subseteq U_1$ oder $V \subseteq U_2$ gilt.

Aufgabe 4
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir definieren auf $V \times V$ eine Verknüpfung $\oplus$ und eine Abbildung $* : \mathbb{C} \times (V \times V) \to (V \times V)$ durch

$$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \text{und} \qquad (a+ib) * (v_1, w_1) = (av_1 - bw_1, bv_1 + aw_1)$$

für alle $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times V$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Zeigen Sie, dass $(V \times V, \oplus, *)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.