MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
23.04.2018

Übungsblatt 3
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 24.04.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen; Eine Abgabe von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringen Sie sie in die normierte Zeilenstufenform, wobei Sie in jedem Schritt die verwendeten Elementarumformungen angeben. Geben Sie mit Hilfe der Theoreme aus der Vorlesung die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ für $Ax = b$ an.

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, wenn eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA = E_n$ existiert. Sind diese Gleichungen erfüllt, dann nennt man B eine zu A *inverse* Matrix und man schreibt $A^{-1} := B$.
Man bezeichnet A als *nilpotent*, wenn $A^m = \mathbf{O_n}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, wobei wir mit $\mathbf{O_n}$ die Matrix $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ bezeichnen, die nur das Nullelement des Körpers $\mathbb{K}$ als Einträge hat. Eine solche Matrix nennen wir *Nullmatrix*.

(i) Zeigen Sie, dass es zu jeder invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau eine inverse Matrix A^{-1} gibt.

(ii) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier invertierbarer Matrizen wieder invertierbar ist.

(iii) Weisen Sie nach, dass eine Matrix niemals zugleich invertierbar und nilpotent ist.

(iv) Sei $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotent. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = E_n + C$ invertierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie Matrizen der Form $E_n - C + C^2 + ... + (-1)^m C^m$ mit $m \in \mathbb{N}$.

vi) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Wir bezeichnen mit A^t die *transponierte Matrix* der Matrix A, dessen $(i, j)-$ter Eintrag durch $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}$ für $1 \le i \le n$ und $1 \le j \le m$ definiert ist.
Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A^t = A$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix $A^t + A$ symmetrisch ist.

(ii) Untersuchen Sie, ob das Produkt zweier symmetrischer Matrizen wiederum symmetrisch ist.