MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
16.04.2018

Übungsblatt 2
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 17.04.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen; Eine Abgabe von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$ und $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$ für alle $v, w \in \mathbb{K}^3$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass ϕ eine Linearform ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition der Linearform aus der Vorlesung: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Falls für $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Koeffizienten $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ existieren, sodass

$$\forall v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{K}^n : \phi(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

dann nennen wir ϕ eine Linearform.
In der vorliegenden Aufgabe erhält man den ersten Koeffizienten a_1 durch $a_1 = \phi(1, 0, 0)$.

Aufgabe 2
Lösen Sie das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ für die unten angegebene Matrix A und den Vektor b, indem Sie zunächst eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems und dann die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems berechnen. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 3 Übungsblatt 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \\ -1 & -15 & 11 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3
Sei $\mathbb{K}$ ein Köper. Für $n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definieren wir

$$\exp(A) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m,$$

wobei A^m die m-te Potenz der Matrix A bezeichnet. Die Potenz einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ wird als wiederholte Multiplikation definiert: Sei $n, m \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dann ist $A^0 := E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $A^m := \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{m-\text{mal}}$.

Sei nun $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass gilt

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst A^m per vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$ und benutzen Sie die Reihendarstellung von sin und cos aus der Analysis I.

(ii) Wählen Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie $y = \exp(A) \cdot x$. Zeichnen Sie die Vektoren x, y. Welcher geometrischen Opertation entspricht $\exp(A)$?

(iii) Welches Ergebnis erwarten Sie für $\exp(A)^2 = \exp(A) \cdot \exp(A)$? Argumentieren Sie geometrisch, ob $\exp(A) \cdot \exp(A) = \exp(A + A)$ gilt.
Ist diese Rechenregel für allgemeine Matrizen A, B, d.h. $\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A+B)$ für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, zu erwarten?