MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
02.07.2018

Übungsblatt 14
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 10.07.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Es sei A eine invertierbare Matrix und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$, und $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $J^2 = -\mathrm{I}_n$, wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichne.

(i) Zeigen Sie, dass J keine reellen Eigenwerte besitzt, und dass $\pm i$ die einzig möglichen komplexen Eigenwerte sind. (Dabei wird J als Element von $\mathbb{C}^{n\times n}$ betrachtet.)

(ii) Sei $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von J zum Eigenwert i. Weisen Sie nach, dass dann $\bar{v} = (\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n)$ ein Eigenvektor von J zum Eigenwert $-i$ ist. Schließen Sie daraus, dass die Eigenwerte $\pm i$ von J die gleiche geometrische Vielfachheit haben.

Aufgabe 3

Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und sei $U = \mathrm{span}(S)$ der Untervektorraum mit dem Erzeugendensystem $S = \{f, g, h\}$, wobei $f(x) = e^x$, $g(x) = xe^x$ und $h(x) = e^{-x}$ ist. Sei $D_U : U \to U$ gegeben durch die Ableitung, also $D_U(p) = p'$ für alle $p \in U$. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $\mathcal{B} = (f, g, h)$ eine geordnete Basis von U darstellt, D_U linear ist und dass $D_U(U) \subseteq U$.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D_U)$.

(ii) Berechnen Sie die reellen Eigenwerte von D_U, und geben Sie deren algebraische Vielfachheiten an.

(iii) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert λ eine Basis von $\mathrm{Eig}(D_U, \lambda)$, und geben Sie die geometrische Vielfachheit $\mu_g(D_U, \lambda)$ an.

Aufgabe 4

Berechne für die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte und Eigenvektoren.