MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
02.07.2018

Übungsblatt 13
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 03.07.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Falls eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $B = TAT^{-1}$, dann nennt man A und B zueinander ähnlich. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten, falls A und B ähnlich sind.

(i) Es gilt $\det A = \det B$ und $\mathrm{spur}(A) = \mathrm{spur}(B)$.

(ii) Genau dann ist λ ein Eigenwert von A, wenn λ ein Eigenwert von B ist.

(iii) Es gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen und $\phi : V \to V$ gegeben durch $X \mapsto AX$, mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (\mathrm{B}_{11}, \mathrm{B}_{12}, \mathrm{B}_{21}, \mathrm{B}_{22})$ bestehend aus den Basismatrizen.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von ϕ. Geben Sie für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit an.

(c) Bestimmen Sie für einen der Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$. Bitte beachten Sie dabei, dass die Basiselemente in V (und nicht in $\mathbb{R}^4$) liegen.