Übungsblatt 11
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 19.06.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

(i) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\Phi_{\mathcal{B}}(B + nC)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad , \qquad C = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(ii) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = (e_1^*, e_2^*)$, wobei e_1^*, e_2^* die eindeutig bestimmten linearen Abbildungen mit $e_1^*(1,0) = 1$, $e_1^*(0,1) = 0$, $e_2^*(1,0) = 0$ und $e_2^*(0,1) = 1$ bezeichnen. Sei $f \in V$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $f(2,3) = 8$ und $f(-1,7) = -2$. Bestimmen Sie $\Phi_{\mathcal{B}}(f)$.

Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = ((1,2,0),(0,3,1))$ und $\mathcal{B} = ((1,2,0),(1,-1,-1))$ geordnete Basen von U sind.

(ii) Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\phi(x_1, x_2, x_3) = (3x_3, 2x_2, \frac{4}{3}x_1)$. Weisen Sie nach, dass ϕ linear ist und $\phi(U) \subseteq U$ gilt.

(iii) Sei $\psi = \phi|_U$. Nach Teil (ii) ist ψ eine lineare Abbildung $U \to U$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi)$ $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\psi)$ $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\psi)$ und $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi)$.

Aufgabe 3

Gegeben sei der Untervektorraum $U := \operatorname{span}(\{v_0, v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des Raumes der glatten Funktionen, wobei $v_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k e^x$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(i) Begründen Sie kurz, dass durch $\mathcal{B} := (v_0, v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von U gegeben ist.

(ii) Gegeben sei der bekannte Ableitungsoperator $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$. Zeigen Sie, dass $D(U) \subseteq U$ und somit durch $D_U : U \to U,\ f \mapsto f'$ eine weitere lineare Abbildung gegeben ist. Bestimmen Sie nun die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D_U)$

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe von $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D_U)$ die Funktionen f' und f'', wobei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3xe^x + x^2e^x - 2x^3e^x.$$