Übungsblatt 10
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 12.06.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Seien U, V, W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\phi : U \to V$, $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen, wobei ϕ injektiv, ψ surjektiv ist und $\phi(U) = \ker(\psi)$ gilt. Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$\dim U + \dim W = \dim V$$

Aufgabe 2

Für $V := \mathbb{R}^3$ seien die folgenden Untervektorräume $U_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 6x_3 = 0\}$ und $U_2 := \operatorname{span}(\{(3, 2, 1), (3, 0, -1)\}) \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben.

(i) Argumentieren Sie durch Anwenden von Resultaten aus der Vorlesung und ohne explizites Bestimmen von $U_1 \cap U_2$, welchen Wert $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)$ annimmt.

(ii) Finden Sie nun explizit eine Basis des Untervektorraums $U_1 \cap U_2$ und bestätigen Sie damit Ihr Resultat bezüglich der Dimension dieses Untervektorraums aus Teil (i). Geben Sie außerdem eine Basis von U_1 an.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(I) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^2)$

(II) $SR(A) = SR(A^2)$

(III) $\dim \ker(A) = \dim \ker(A^2)$

(IV) $\ker(A) = \ker(A^2)$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $l, m, n \in \mathbb{N}$ sowie $B \in K^{n \times l},\ A \in K^{m \times n}$. Zeigen Sie:

(i) $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) \leq n + \operatorname{rg}(AB)$

(ii) $\operatorname{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow \big(\exists a \in K^{m \times 1} \setminus \{0\}, b \in K^{1 \times n} \setminus \{0\} : A = ab\big)$