Tutoriumsblatt 7 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 28.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 15%)

Für einen K-Vektorraum V und $S \subseteq V$ definieren wir

$$\operatorname{lin}(S) := \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \;\Big|\; v_k \in S, \lambda_k \in K, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Seien nun $S, T \subseteq V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

(i) $\operatorname{lin}(S) = \operatorname{lin}(T) \Rightarrow S = T$

(ii) $S \subseteq T \Rightarrow \operatorname{lin}(S) \subseteq \operatorname{lin}(T)$

Aufgabe 2 (Gewichtung 25%)

Sei V ein K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\phi \circ \phi = \phi$.

(i) Beweisen Sie die Gleichung $\phi(V) = \{v \in V \mid \phi(v) = v\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $v - \phi(v) \in \ker(\phi)$ für alle $v \in V$ gilt.

(iii) Weisen Sie nach, dass $V = \ker(\phi) \oplus \phi(V)$ gilt.

(iv) Zeigen Sie, dass ϕ genau dann injektiv ist, wenn $\phi = \mathrm{id}_V$ gilt.

Aufgabe 3 (Gewichtung 30%)

Sei $I = [a, b] \neq \varnothing$,

$$\mathcal{P}_n := \Big\{ p : I \to \mathbb{R} : \Big(\forall x \in I : p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} \Big) \Big\}$$

sowie $\phi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$ der aus dem Zentralübungsblatt bekannte Isomorphismus.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Begründen Sie kurz, warum die Abbildung $(D \circ \phi_n)$ $\mathbb{R}$-linear ist, wobei D gegeben sei durch

$$D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ f \mapsto (f' : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{df(x)}{dx})$$

und bestimmen Sie anschließend ihren Kern $\ker(D \circ \phi_n)$ sowie das Bild $(D \circ \phi_n)(\mathbb{R}^{n+1})$.

(ii) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ gibt mit $(\phi_n^{-1} \circ D \circ \phi_n)(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und geben Sie diese an.

Aufgabe 4 (Gewichtung 30%)

Sei K ein Körper mit $1_K \neq -1_K$ und V ein K-Vektorraum. Für eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ mit $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ definieren wir

$$V^+ = \{v \in V \mid \phi(v) = v\} \qquad \text{und} \qquad V^- = \{v \in V \mid \phi(v) = -v\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass V^+ und V^- Untervektorräume von V sind.

(ii) Weisen Sie nach, dass $V = V^+ + V^-$ und $V^+ \cap V^- = \{0_V\}$ gilt, d.h. $V = V^+ \oplus V^-$.