MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
14.05.2018

Tutoriumsblatt 6
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens **Mittwoch**, den 23.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1: (Gewichtung 25%)

Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{(Addition)}$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad \text{(Multiplikation)}$$

Zeigen Sie:

(i) $(1, 0)$ ist neutrales Element von $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \cdot)$.

(ii) $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ ist das bzgl. der Multiplikation inverse Element zu (x, y), falls $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(iii) Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ gilt das Distributivgesetz:

$$(x_1, y_1)\big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)$$

Aufgabe 2: (Gewichtung 25%)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $U_Q := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^tQA = Q\}$ für $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Zeigen Sie:
Für alle $M, S \in GL(n, \mathbb{K})$ und $N := S^tMS$ ist die Abbildung

$$\phi : U_M \to U_N, \phi(A) = S^{-1}AS$$

wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus zwischen den Untergruppen U_M und U_N von $GL(n, \mathbb{K})$.
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass U_M bzw. U_N eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$ ist.

Aufgabe 3: (Gewichtung: 25%)

Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f_i : V \to W$ auf Linearität, Surjektivität und Injektivität. In welchen Fällen liegt ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen vor?

(i) $V = W = \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$

(ii) $V = W = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f_2(A) = AB$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: (Gewichtung 25%)

Seien V, W zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume. Wir definieren auf $V \times W$ eine Verknüpfung $\oplus$ und eine Abbildung $* : \mathbb{C} \times (V \times W) \to (V \times W)$ durch

$$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \text{und} \qquad \lambda * (v_1, w_1) = (\lambda v_1, \bar{\lambda} w_1)$$

für alle $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dabei bezeichnet $\bar{\lambda}$ jeweils die zu λ konjugiert-komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass $(V \times W, \oplus, *)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.