MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
30.04.2018

Tutoriumsblatt 4
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 07.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung: 25%)

(i) Erinnern Sie sich an die Definition einer *nilpotenten* Matrix auf dem Zentralübungsblatt 3. Weisen Sie nach, dass die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ nilpotent ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(ii) Zeigen Sie, dass allgemein gilt: Ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^4$, dann hat das inhomogene LGS $Av = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung $v \in \mathbb{R}^4$.

(iii) Verwenden Sie Teil (iv) der Aufgabe 2 auf Zentralübungsblatt 3, um eine Lösung des LGS

$$(E_4 + A)v = w$$

zu bestimmen, wobei A die Matrix aus Teil (i) und $w = (2, 0, -1, 1)$ ist.

Aufgabe 2 (Gewichtung: 25 %)

(i) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Blockmatrix $A \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & C \end{pmatrix}$$

genau dann invertierbar ist, wenn B und C invertierbar sind. Wie sieht die inverse Matrix A^{-1} aus?

(ii) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 37 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Gewichtung: 25 %)
Wie schon in der Vorlesung definiert, werden die Matrizen in $\mathbb{K}^{m\times m}$ der Form

$$M_{k,\lambda} = E_m + (\lambda - 1)B_{kk}^{(m\times m)} \text{ für } k \in \{1, ..., m\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}^\times$$

und

$$A_{k,l,\lambda} = E_m + \lambda B_{lk}^{(m\times m)} \text{ für } k, l \in \{1, ..., m\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}$$

mit

$$(B_{kl}^{(m\times m)})_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl} \text{ für } 1 \leq i, j \leq m,$$

Elementarmatrizen genannt.

(i) Geben Sie die inverse Matrix der Elementarmatrix $M_{k,\lambda}$ sowie $A_{k,l,\lambda}$ an und weisen Sie dies rechnerisch nach.

(ii) Bestimmen Sie Matrizen $T, U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$T\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}U = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 9 & 8 & 7\end{pmatrix}$$

Hinweis: Dafür ist keine aufwändige Rechnung nötig!

(iii) Stellen Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ als Produkt aus Elementarmatrizen dar.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 25 %)

(i) Auf dem Zentralübungsblatt 2 haben Sie in Aufgabe 3 die Drehmatrix kennengelernt, die Drehungen in der Ebene um den Ursprung beschreibt.
Zeigen Sie, dass die Menge M mit

$$M = \left\{\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

mit der Matrixmuliplikation eine Gruppe bildet. Untersuchen Sie ferner, ob es sich dabei um eine abelsche Gruppe handelt.

(ii) Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq X$ unter der jeweils angegebenen Verküpfung $*$ abgeschlossen sind, und ob U mit der entsprechend eingeschränkten Verknüpfung eine Gruppe ist.

(a) $X = \mathbb{R}^{3\times 3}, U = \left\{\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \mu\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$, $*$ ist die Multiplikation von Matrizen

(b) $X = \mathbb{R}$, $U = \{r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\ ,\ (r, s) \neq (0, 0)\}$, $*$ ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}$