MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
23.04.2018

Tutoriumsblatt 3
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 30.04.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).
Melden Sie sich, falls noch nicht geschehen, für eines der Tutorien an. Alle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/lin_alg18/`

Aufgabe 1 (Gewichtung: 25 %)
Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) In der Vorlesung haben Sie die *normierte Zeilenstufenform* kennengelernt. Welche der Matrizen sind bereits in der normierten Zeilenstufenform?

(ii) Bringen Sie die restlichen Matrizen in ihre normierte Zeilenstufenform.

(iii) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, wenn eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $AB = BA = E_n$ existiert. Sind diese Gleichungen erfüllt, dann nennt man B eine zu A *inverse* Matrix und man schreibt $A^{-1} := B$.
Invertieren Sie die Matrizen, falls möglich. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 2 (Gewichtung: 25 %)
Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix und bringen Sie diese in die normierte Zeilenstufenform, wobei Sie in jedem Schritt die von Ihnen verwendeten Elementarumformungen angeben. Geben Sie mit Hilfe der Theoreme aus der Vorlesung die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ an.

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a-1)x_1 & & & + & (a+1)x_3 & = & 5a-8 \\ 2(a-1)x_1 & + & x_2 & + & 2(a+1)x_3 & = & 10a-9 \\ (a-1)x_1 & - & 2x_2 & & & = & 2a-16 \end{array}$$

Aufgabe 3 (Gewichtung: 25 %)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über Matrizen wahr oder falsch sind, d.h. geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $\mathbb{K}$ ein Körper. Mit $\mathbf{O_n}$ bezeichnen wir die Matrix $\in \mathbb{K}^{n \times n}$, die nur das Nullelement des Körpers $\mathbb{K}$ als Einträge hat. Eine solche Matrix nennen wir *Nullmatrix*.

(i) Sei $m \in \mathbb{N}$. Es gilt $(A_1 A_2 \cdots A_m)^t = A_m^t A_{m-1}^t \cdots A_1^t$ für Matrizen $A_1, ..., A_m$, so dass das Produkt $A_1 A_2 \cdots A_m$ wohldefiniert ist.

(ii) Aus $AB = \mathbf{O_n}$ folgt $A = \mathbf{O_n}$ oder $B = \mathbf{O_n}$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

(iii) Aus $A^2 = A$ folgt $A = E_n$, für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

(iv) Aus $A^2 = A$ folgt $A = E_n$, für alle invertierbaren $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

(v) Es gilt $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 25 %)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A^t = A$ gilt.

(i) Zeigen Sie: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann ist das Produkt $A^t A$ symmetrisch.

(ii) Bestimmen Sie die Menge aller $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass das Produkt AB symmetrisch ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$