MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
16.04.2018

Tutoriumsblatt 2
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 23.04.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).
Melden Sie sich, falls noch nicht geschehen, für eines der Tutorien an. Alle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/lin_alg18/`

Aufgabe 1 (Gewichtung: 40%)

(i) Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen paarweise addiert/multipliziert werden können.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Stellen Sie eine Merkregel auf, für welche Wahl von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ die Matrixaddition $A + B$ und das Matrixprodukt $A \cdot B$ für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{\alpha\times\beta}, B \in \mathbb{K}^{\gamma\times\delta}$ wohldefiniert ist.

(ii) Seien die beiden Matrizen A, B gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Produkt AB und BA.

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ eine allgemeine Matrix mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Geben Sie jeweils eine konkrete Matrix B an, so dass

(a) das Produkt AB, die 1., 2. bzw. 3. Spalte von A ergibt, also

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}, j \in \{1, 2, 3\}.$$

(b) das Produkt BA, die 1., 2. bzw. 3. Zeile von A ergibt, also

$$BA = \begin{pmatrix} a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \end{pmatrix}, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Aufgabe 2 (Gewichtung: 20%)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Erinnern Sie sich an die Definition der Linearform, die wie folgt lautet: Falls für $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Koeffizienten $\Phi_1, ..., \Phi_n \in \mathbb{K}$ existieren, sodass

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n : \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i x_i,$$

dann nennen wir Φ eine Linearform.

Zeigen Sie: Seien $c, d : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Linearformen und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind auch folgende Funktionen Linearformen.

(i) $(c + d) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, x \mapsto c(x) + d(x)$

(ii) $\lambda c : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, x \mapsto \lambda c(x)$

Aufgabe 3 (Gewichtung: 20%)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}, a_1, ..., a_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Linearformen, $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{K}^m$ ein Vektor und $((a_1, ..., a_m), b)$ das entsprechende LGS. Wir definieren die sogenannten Elementarumformungen

$$M_{k,\lambda}((a_1, ..., a_k, ..., a_m), (b_1, ..., b_k, ..., b_m)) := ((a_1, ..., \lambda a_k, ..., a_m), (b_1, ..., \lambda b_k, ..., b_m))$$

mit $1 \leq k \leq m, \lambda \in \mathbb{K}^\times$, d.h. das Ersetzen der k-ten Gleichung durch ihr λ-faches, und

$$A_{k,l,\lambda}((a_1, ..., a_k, ..., a_l, .., a_m), (b_1, ..., b_k, ..., b_l, ...b_m)) :=$$

$$((a_1, ..., a_k, ..., \lambda a_k + a_l, .., a_m), (b_1, ..., b_k, ..., \lambda b_k + b_l, ...b_m))$$

mit $1 \leq k \neq l \leq m, \lambda \in \mathbb{K}$, d.h. das Ersetzen der $l-$ten Gleichung durch die Summe des λ-fachen der k-ten Gleichung und der $l-$ten Gleichung.

Zeigen Sie, wie durch Kombinationen der Operationen $M_{k,\lambda}$ und $A_{k,l,\lambda}$ jeweils für geeignete k, l, λ die Vertauschung $V_{r,s}$ der r-ten und der s-ten Gleichung, d.h.

$$V_{r,s}((a_1, ..., a_r, ..., a_s, ...a_m), (b_1, ..., b_r, ..., b_s, ...b_m)) := (a_1, ..., a_s, ...a_r, ..., a_m), (b_1, ..., b_s, ..., b_r, ...b_m))$$

erreicht werden kann.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 20%)
Sei die Matrix A gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Potenzen A^2, A^3 und geben Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$ an. Beweisen Sie letzteres mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion.