Tutoriumsblatt 0 - Mathematisches Warming up für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

1. Seien A und B Propositionen, d.h. Aussagen, die eindeutig wahr oder falsch sind.
   (i) Definieren Sie „$A \Rightarrow B$“ über eine Wahrheitstabelle. Machen Sie sich anhand eines konkreten Beispiels klar, dass „(falsch $\Rightarrow$ wahr)“ und „(falsch $\Rightarrow$ falsch)“ als *wahr* definiert sein muss.
   (ii) Wir definieren „$(A \Leftrightarrow B) := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$“. Geben Sie die dazugehörige Wahrheitstabelle an.
   (iii) Beweisen Sie „$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$“, wobei $\neg A$ die Negation von A ist.

2. Geben Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an:
   (i) $(2 \cdot 3 = 6) \vee (3 \cdot 3 = 8)$
   (ii) $(2 \cdot 3 = 5) \Rightarrow (2 \cdot 3 = 6)$
   (iii) $(2 \cdot 3 = 5) \Leftrightarrow (2 \cdot 3 = 7)$
   (iv) $(2 \cdot 2 = 4) \wedge ((-2) \cdot (-2) = 4)$
   (v) $\forall x \in \mathbb{Z} : (x = 0 \Rightarrow 3 \cdot x = 4 \cdot x)$
   (vi) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : x < y$
   (vii) $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$

3. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der Aussagenlogik und überprüfen Sie ihren Wahrheitswert:
   i) 7 ist eine Quadratzahl und ungerade, oder 7 ist keine Quadratzahl und gerade.
   ii) Wenn 8 Teiler von 29 und 5 Teiler von 35 ist, dann ist 8 Teiler von 32 oder 35 kleiner als 5.

4. Notieren Sie die formale $\epsilon - \delta -$ Definition von Stetigkeit und negieren Sie sie mittels Quantorenumkehrung.

5. Welche der folgenden Aussagen über ganze Zahlen sind gleichbedeutend und für welche gilt nur „$\Rightarrow$“?

$$
\begin{aligned}
x &= 25 \\
3 \cdot x &= 75 \\
9 \cdot x^2 &= 225 \\
6 \cdot x^2 &= 150 \\
\forall b \in \mathbb{Z} : (6bx^2 &= 150b) \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

6. Vervollständigen Sie folgende Ausdrücke: Seien M_1 und M_2 Mengen, dann gilt

   (i) $M_1 \cap M_2 = \{x | x \in .....\}$

   (ii) $M_1 \cup M_2 = \{x | x \in .....\}$

   (iii) $M_1 \subset M_2 \Longleftrightarrow \forall x \in ....$

   (iv) Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen. Dann ist

   $$\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x | .....\}$$

   und

   $$\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x | .....\}$$

7. Sei Ω eine Menge und $M \subset \Omega$. Dann bezeichnet $\Omega \backslash M = M^c := \{\omega \in \Omega | \omega \notin M\}$. Zeigen Sie

   $$\left(\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha^c.$$

8. Seien A, B Mengen und f eine zweistellige Relation mit Quellmenge A und Zielmenge B, d.h. $f \subseteq A \times B$.

   (i) Welche Bedingungen müssen gelten,

      (a) damit f eine Funktion ist?

      (b) damit die Funktion f injektiv ist?

      (c) damit die Funktion f surjektiv ist?

   (ii) Sei nun $y \in B$ gegeben. Unter welcher Bedingung hat die Gleichung $f(x) = y$

      (a) keine Lösung?

      (b) mindestens eine Lösung $x \in A$?

      (c) eine eindeutige Lösung $x \in A$?

   (iii) Wir betrachten nun die Abbildung $f : A \to B, x \mapsto x^2$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ so, dass

      (a) f weder injektiv noch surjektiv ist.

      (b) f injektiv, aber nicht surjektiv ist.

      (c) f nicht injektiv, aber surjektiv ist.

      (d) f bijektiv ist.