MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2015

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1

Wir betrachten eine reelle Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und deren Verteilungsfunktion

$$V_x : \mathbb{R} \to [0,1]\ , \quad t \mapsto V_x(t) = P(X^{-1}(]-\infty, t])). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $V_x(b) - V_x(a) = P(X^{-1}(]a, b]))$ für alle $a < b$ gilt.

(b) Sei $V_x(t-0) := \lim_{s \to t, s<t} V_X(s)$ der linksseitige Grenzwert im Punkt t. Falls $h := V_x(t) - V_x(t-0) > 0$, so sagt man, dass F in t einen Sprung der Höhe h besitzt. Zeigen Sie, dass V_x genau dann in t einen Sprung der Höhe h besitzt, wenn $P(X = \{t\}) = h$.

Aufgabe 2

Es seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit stetigen Dichten ρ_1 und ρ_2.

(a) Zeigen Sie, dass die Dichte von $Y = X_1 + X_2$ gegeben ist durch die Faltung der beiden ursprünglichen Dichten: $\rho(x) = (\rho_1 * \rho_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x-y)\rho_2(y)\, dy$.

Hinweis: Bei unabhängigen Zufallsvariablen mit stetigen Dichten faktorisiert die gemeinsame Dichte: $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$ und

$$P((X,Y) \in A) = \underbrace{\int\int}_{A} dxdy\rho(x,y). \tag{2}$$

(b) Berechnen Sie die Dichte für den Fall $\rho_1(x) = e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ und $\rho_2(x) = \alpha e^{-\alpha x}\chi_{[0,\infty)}$, wobei $\alpha > 0$ ist.

Aufgabe 3
Eine Münze wird solange geworfen bis Sie das erste Mal Kopf zeigt. X sei die benötigte Anzahl von Würfen und p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem einmaligen Wurf das Ereignis Kopf eintritt. Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

Aufgabe 4
Das **Bertrand'sche Paradoxon**: In einem Kreis mit Radius $r > 0$ werde „rein zufällig" eine Sehne gezogen. Die Frage mit welcher Wahrscheinlichkeit sie länger als die Seiten eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist, kann nicht eindeutig beantwortet werden. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Antwort von dem Verfahren abhängt, mit dem die Sehne gezogen wird.

(a) Die Sehne ist durch ihren Mittelpunkt eindeutig bestimmt (solange dieser nicht gerade der Kreismittelpunkt ist, was vernachlässigt werden kann). Man kann deshalb das „zufällige" Ziehen einer Sehne so interpretieren, dass ein „zufälliger" Punkt im Kreis als Mittelpunkt der Sehne ausgewählt und dessen zugehörige Sehne konstruiert wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine auf diese Weise „rein zufällig" gezogene Sehne länger ist als die Seiten eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

(b) „Zufällig" kann auch bedeuten, dass die beiden Schnittpunkte der Sehne mit dem Kreis zufällig gewählt werden. Da nur die relative Lage der Schnittpunkte ausschlaggebend für die Länge der Sehne ist, liefert aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems folgende Vorgehensweise die gleiche Längenverteilung: Fixieren Sie einen Punkt auf dem Kreis. Wählen Sie anschließend „zufällig" einen zweiten Punkt auf dem Kreis und zeichnen Sie die Sehne durch beide Punkte.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine auf diese Weise „rein zufällig" gezogene Sehne länger ist als die Seiten des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

(c) Das Ziehen einer Sehne soll nun gemäß Teilaufgabe (a) geschehen. Die Zufallsvariable X sei gegeben durch die Sehnenlänge. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

Abgabe: Mittwoch 27.5.2015 , 16 Uhr.