

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 9

Aufgabe 1: Seien A, B nichtleere Teilmengen einer Menge Ω . Man konstruiere die von A, B erzeugte σ -Algebra.

Aufgabe 2: Sei $\bar{\mathcal{C}}$ die Menge aller abgeschlossenen und \mathcal{C} die Menge aller offenen Intervalle in \mathbb{R} . Die von \mathcal{C} erzeugte σ -Algebra heißt Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: $\bar{\mathcal{C}}$ erzeugt ebenfalls $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie: Die Menge aller offenen Mengen erzeugt ebenfalls $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3: Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge absteigender Mengen, d.h. $M_n \subset M_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ und $F_n := M_{n-1} \setminus M_n = M_{n-1} \cap M_n^c$. Zeigen Sie, nachdem Sie sich die Situation graphisch veranschaulicht haben:

(a) $F_j \cap F_k = \emptyset$ für $k \neq j$;

(b) $M_1 \setminus M = \bigcup_{j=2}^{\infty} F_j$;

(c) Seien A und B Lebesgue-messbare Mengen mit $A \subset B$ und $\lambda(A) < \infty$, dann ist $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A)$;

(d) $\lambda(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(M_n)$. *Hinweis:* Benutzen Sie die σ -Additivität.

Aufgabe 4:

(a) Sei $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ die Cantormenge, die durch sukzessive Wegnahme der “mittleren Drittel“ entsteht. Zeigen Sie: \mathcal{C} ist überabzählbar. (*Hinweis:* Stellen Sie $x \in [0, 1]$ im triadischen System dar. Wie sieht \mathcal{C} dann aus?).

Zur Erinnerung: Die Cantormenge $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ ist $\mathcal{C} := \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$, wobei \mathcal{C}_k induktiv wie folgt definiert wird: $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$ und \mathcal{C}_{k+1} entsteht aus \mathcal{C}_k , indem man \mathcal{C}_k als disjunkte Vereinigung von 2^k Intervallen darstellt und aus jedem dieser Intervalle das offene mittlere Drittel entfernt.

(b) Zeigen Sie: $\lambda(\mathcal{C}) = 0$.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:

<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php>