

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 6

Aufgabe 1: Zeigen Sie den Gaußschen Mittelwertsatz: Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz (d.h. überall komplex differenzierbar). Dann gilt für alle $r \geq 0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\phi}) d\phi.$$

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz mit $|f(z)| \leq C|z|^\alpha$ für alle $|z| \geq R$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und $C, R > 0$. Zeigen Sie: f ist ein Polynom höchstens $[\alpha]$ -ten Grades, wobei die Gaußklammer $[\alpha]$ von α die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich α ist.

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Beweisen Sie, dass dann $f(\mathbb{C})$ dicht in \mathbb{C} liegt, d.h. dass es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $|f(z) - w| < \epsilon$.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie Liouvilles Satz auf eine geeignete Funktion anwenden.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Potenzreihe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$. Diese konvergiere für ein $z_1 \neq 0$.

- Sei $r \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass $f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r < |z_1|$ absolut und gleichmäßig konvergiert. *Hinweis:* Suchen Sie jeweils eine Majorante für die Summanden der Potenzreihe.
- Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $f(z)$, also $R \in \mathbb{R}^+$ mit $R = \sup\{r \in \mathbb{R} : f(z) \text{ konvergent für } |z| < r\}$. *Hinweis:* Finden sie eine geschickte Abschätzung für die Summanden der Potenzreihe um letztere mit der geometrischen Reihe zu vergleichen.
- Betrachten Sie nun die Potenzreihe $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|a|, |b| \leq r < R$. Es bezeichne $f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f_N(x) dx,$$

also, dass Sie in diesem Fall Integration und Limesbildung vertauschen können.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:

<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php>