Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1: Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Laurent-Reihen, die im angegebenen Bereich konvergieren sollen!

a) $\frac{1}{z^2(z-2)}$ entwickelt um 0 konvergent für $0 < |z| < 2$.

b) $\frac{1}{z^2(z-2)}$ entwickelt um 0 konvergent für $|z| > 2$.

c) $\frac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z}}$ entwickelt um 1, konvergent für $0 < |z-1| < 1$.

d) $\frac{\sin(2z)}{z^3}$ entwickelt um 0. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich!

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie explizit alle auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z) - 3| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 3$ gilt, dass $|f'(z)| \leq 1 + e^{-|z|}$. Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant. Beweisen Sie, dass dann $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, d.h. dass es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $|f(z) - w| < \varepsilon$.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie Liouvilles Satz auf eine geeignete Funktion anwenden.

Aufgabe 4:

a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie das so genannte Maximumsprinzip: Wenn f bei $a \in U$ ein lokales Maximum hat, dann ist f konstant in U.
Hinweis: Wir sagen, dass f bei a ein lokales Maximum hat, wenn es einen offenen Kreis $B_r(a)$ um a gibt mit $|f(z)| \leq |f(a)|\ \forall z \in B_r(a)$. Benutzen Sie zum Beweis den Gauß'schen Mittelwertsatz vom vierten Übungsblatt und versuchen Sie einen Widerspruchsbeweis.

b) Benutzen Sie das Maximumsprinzip, um folgende Aussagen zu zeigen:
Sei $f : B_2(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Dann existiert $z \in B_2(0)$ mit $|f(z)| > 1$.

Abgabe: Montag, 04.12.2017, 10 Uhr.