

# Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl  
Blatt 3

**Aufgabe 1:** Welche der folgenden Funktionen sind holomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a)  $f(z) = \bar{z}$ ,
- (b)  $f(z) = |z|$ ,
- (c)  $f(z) = 1/z$ ,  $z \neq 0$ .

**Aufgabe 2:** Es sei  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x, y) = y^2 - x^2$  und  $z = x + iy$ . Finden Sie eine Funktion  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) := f_1(x, y) + if_2(x, y)$  holomorph ist!

**Aufgabe 3:** Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar, aber die Ableitung nicht stetig ist.

Zeigen Sie dann, dass die entsprechend definierte Funktion im Komplexen nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 4:** Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

- (a)  $\int_{\gamma_1} \operatorname{Re}(z) dz$  für  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto Re^{2i\pi t}$  mit  $R > 0$ ,
- (b)  $\int_{\gamma_2} e^{(1+i)\pi z} dz$  mit einer beliebigen Kurve  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , die die Punkte  $1 + i$  und  $0$  verbindet. Warum ist die genaue Kurve irrelevant?

**Aufgabe 5:** Welche der folgenden Räume sind zusammenhängend, welche wegzusammenhängend und welche einfach zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a)  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
- (b)  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = 0\}$
- (c)  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$

*Abgabe: Montag, 13.11.2017, 10 Uhr.*